Phénomènes de transport 2
Transfert thermique par conduction

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Énoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.
- ❑ Utiliser avec rigueur les notation d et δ en leur attachant une signification.
- ❑ Décrire les trois modes de transfert thermique.
- ❑ Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur $\overrightarrow{j_Q}$ à travers une surface orientée.
- ❑ Énoncer l'hypothèse de l'équilibre thermodynamique local.
- ❑ Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
- ❑ Énoncer et utiliser la loi de Fourier.
- ❑ Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
- ❑ Établir, pour un milieu évoluant à volume constant, l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant que d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques.
- ❑ Utiliser une généralisation admise en géométrie quelconque à l'aide de l'opérateur divergence et son expression fournie.
- ❑ Établir l'équation de diffusion thermique avec ou sans terme source.
- ❑ Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
- ❑ Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.
- ❑ Exploiter la continuité du flux thermique.
- ❑ Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait.
- ❑ Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.
- ❑ Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique et énoncer les conditions d'application de l'analogie.
- ❑ Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement.
- ❑ Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.
- ❑ Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température.
- ❑ Justifier l'ARQS.
- ❑ Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
- ❑ Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle.
- ❑ Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation.
- ❑ Établir une distance caractéristique d'atténuation.
- ❑ À l'aide d'un langage de programmation, résoudre l'équation de la diffusion thermique à une dimension par une méthode des différences finies dérivée de la méthode d'Euler explicite de résolution des équations différentielles ordinaires.

Résumé du cours

1 Formulation infinitésimale des principes de la thermodynamique

1.1 La différentielle mathématique

Différentielle d'une fonction d'une variable

Hypothèses f est une fonction de x dérivable

$$df = \frac{df}{dx}dx$$

Application [1]

Déterminer la différentielle de $\sin x$

Différentielle d'une fonction de deux variables

Hypothèses f est une fonction de x et de y dérivable par rapport à x et à y

---

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Application [2]

Déterminer la différentielle de $\frac{x}{y}$

La formule de la différentielle d'une fonction de deux variables peut être généralisée pour un nombre quelconque de variables.

Une quantité $Adx+Bdy$ est une **forme différentielle**. On note les formes différentielle avec un δ : $\delta f = Adx+Bdy$. Une quantité $Adx + Bdy$ est une différentielle ssi il existe f telle que $df = Adx + Bdy$.

Application [3]

Les formes différentielles suivantes sont-elles des sont-elles des différentielles ?

$$\delta f = xdx + ydy$$

$$\delta g = ydx + xdy$$

L'intégrale d'une différentielle ne dépend pas du chemin suivi : $\int_{(PQ)} df = f(Q) - f(P)$.

L'intégrale d'une forme différentielle $\int_{(PQ)} \delta f$ dépend du chemin suivi.

Application [4]

$W = \int \delta W$ le travail dépend a priori du chemin suivi $W = \int -dE_p$ car pour une force conservative, le travail est indépendant du chemin suivi

En physique, les grandeurs notées df représentent des **variation** infinitésimales.

Exemple

Entre t et $t + dt$, la température augment de dT

En physique, les grandeurs notées δf représentent des **quantités** infinitésimales.

Exemple

Entre t et $t + dt$, une chaleur δQ rentre dans le système

Exception : pour les variables d'intégration, cette règle est enfreinte. On note dx, dy, dz des dimensions, dS une surface, dV un volume, dt une durée alors que ce ne sont pas des variations.

1.2 Premier principe

Formulation infinitésimale du premier principe de la thermodynamique

Hypothèses

- le système est fermé
- la transformation est infinitésimale

$$dE = \delta W + \delta Q$$

Avec

- $E = E_c + U$ (J)
- E_c l'énergie mécanique macroscopique (J)
- U l'énergie interne (J)
- $\delta W = -P_{\text{ext}} dV$ le travail reçu (J)
- dV la variation du volume (m^3)
- P_{ext} la pression (Pa)
- δQ la chaleur **reçue** (J)

La variation de volume dV et la variation d'énergie dE sont des petites variations et s'écrivent bien avec un d. La chaleur δQ et le travail δW sont des petites quantités et s'écrivent bien avec un δ.

1.3 Second principe

Formulation infinitésimale du second principe de la thermodynamique

Hypothèses

- le système est fermé
- la transformation est infinitésimale

$$dS = \delta S_e + \delta S_c$$

Avec

- S l'entropie ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)
- $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_{\text{ext}}}$ l'entropie échangée **reçue** ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)
- T_{ext} la température (K)
- δQ la chaleur **reçue** (J)
- $\delta S_c \geq 0$ l'entropie créée ($\text{J} \cdot \text{K}^{-1}$)

La variation d'entropie dS est une petite variation et s'écrit bien avec un d. La chaleur δQ, l'entropie échangée δS_e et l'entropie créée δS_c des petites quantités et s'écrivent bien avec un δ.

1.4 Équilibre thermodynamique local

1.4.1 Les 3 échèles

Échelle microscopique ($\sim 10^{-10}$ m) C'est l'échelle des molécules du système. Ces molécules sont animées d'un mouvement erratique. Les grandeurs thermodynamiques n'ont pas de sens pour une molécule.

Échelle macroscopique ($\sim 1 \times 10^{-2}$ m) C'est l'échelle des systèmes étudiés dans leur ensemble.

Si le système est à l'équilibre thermodynamique, on peut définir ses grandeurs thermodynamiques (température, pression, ...) et les étudier comme vu en première année.

Lorsqu'il y a des transferts thermiques à l'intérieur d'un système, ce système n'est pas à l'équilibre thermodynamique. Certaines des grandeurs thermodynamiques de ce système (température, pression, …) ne sont donc pas définies.

Échelle mésoscopique ($\gg 10^{-10}$ m et $\ll 10^{-2}$ m) L'échelle mésoscopique est une échelle intermédiaire entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique.

Comme l'échelle mésoscopique est très grande devant l'échelle microscopique, les fluctuations dues à l'agitation des molécules sont faibles.

Comme l'échelle mésoscopique est très petite devant l'échelle macroscopique, les grandeurs y sont uniformes (ce sont les mêmes en un point ou un autre du système mésoscopique).

L'échelle mésoscopique sert

- pour décrire les systèmes qui ne sont pas à l'équilibre thermodynamique
- pour passer des propriétés microscopiques au propriétés macroscopiques

Les grandeurs extensives associées à un système mésoscopique sont notées avec un δ car ce sont des quantités infinitésimales : δU, δV, …

1.4.2 Équilibre thermodynamique local

Si un système macroscopique peut être découpé en systèmes mésoscopiques qui sont tous à l'équilibre thermodynamique, on dit qu'il y a équilibre thermodynamique local. A l'équilibre thermodynamique local, les grandeurs thermodynamiques sont définies pour les systèmes mésoscopiques.

A l'équilibre thermodynamique local, les grandeurs thermodynamiques sont des champs[1]. Par exemple, la température au point M $T(M)$ est définie comme la température d'un système mésoscopique centré sur le point M. Cette température existe car à l'équilibre thermodynamique local, tous les systèmes mésoscopiques sont à l'équilibre thermodynamique. De plus, cette température ne dépend pas du choix, arbitraire, du système mésoscopique.

Ces champs n'ont un sens que pour les grandeurs intensives car ils dépendraient du choix du volume mésoscopique. On transforme donc les grandeurs extensives en grandeurs intensives en divisant soit par la masse soit par le volume.

grandeur extensive	grandeur massique	grandeur volumique
énergie interne U (J)	énergie interne massique u ($\mathrm{J \cdot kg^{-1}}$)	énergie interne volumique u_V ($\mathrm{J \cdot m^{-3}}$)
masse m (kg)		masse volumique μ ($\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
entropie S ($\mathrm{J \cdot K^{-1}}$)	entropie massique s ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$)	entropie volumique s_V ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}}$)

2 Transport de chaleur

2.1 Les 3 modes de transport de chaleur

La chaleur peut se transporter d'un système à un autre de 3 façons :

Par diffusion (= par conduction) L'énergie se transmet de proche en proche. Le milieu est macroscopiquement immobile.

Exemple

La queue d'un ustensile de cuisine devient chaude.

Par conducto-convection (= par convection) Un fluide est en mouvement. En se déplaçant, le fluide transporte de l'énergie avec lui.

Le fluide peut se mettre en mouvement spontanément si certaines zones sont plus chaudes que d'autres. Ça s'appelle la convection naturelle.

Exemple

L'eau qui chauffe dans la casserole, les courants marins.

Le fluide peut être mis en mouvement par autre chose. Ça s'appelle la convection forcée.

Exemple

L'air du sèche-cheveux.

[1] Un champ est une fonction définie sur tous les points de l'espace.

Par rayonnement Tous les matériaux émettent un rayonnement électromagnétique. La fréquence et l'intensité du rayonnement électromagnétique dépendent de la température du matériau. Le rayonnement électromagnétique transporte de l'énergie. Le rayonnement électromagnétique peut se propager dans le vide ou dans les milieux transparents. Le rayonnement électromagnétique peut être absorbé par un matériau, il lui apporte alors de la chaleur.

Exemple

La chaleur du Soleil, les plaques vitro-céramiques.

2.2 Le vecteur densité de courant thermique

Le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ est la chaleur transitant par unité de surface et de temps.

Chaleur traversant une surface infinitésimale

$$\delta Q = \vec{j}_Q . \overrightarrow{dS} dt$$

Avec

- dS la surface (m^2)
- $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$)
- dt la durée (s)
- δQ la chaleur traversant $\overrightarrow{dS}$ durant dt (J)

Puissance traversant une surface infinitésimale [5]

$$\delta \varphi = \vec{j}_Q . \overrightarrow{dS}$$

Avec

- $\overrightarrow{dS}$ la surface orientée (m^2)
- $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$)
- dt la durée (s)
- $\delta\varphi$ la puissance traversant $\overrightarrow{dS}$ ($\mathrm{J \cdot s^{-1}}$)

La puissance (=flux thermique[2]) qui traverse une surface finie est l'intégrale du flux sur une surface infinitésimale.

Puissance traversant une surface finie

$$\varphi = \iint_S \delta\varphi$$

Avec

- S la surface orientée (m^2)
- $\delta\varphi$ la puissance infinitésimale ($\mathrm{J \cdot s^{-1}}$)
- φ la puissance finie ($\mathrm{J \cdot s^{-1}}$)

Application [6]

Déterminer le flux thermique du vecteur densité de courant $\vec{j}_Q = 2\pi r h (T - T_{\text{ext}})\vec{e_r}$ sur un cylindre de rayon R, de hauteur h centré sur l'axe $(O, \vec{e_z})$ du repère.

2.3 Loi de Fourier

La loi de Fourier est une loi phénoménologique[3]. La loi de Fourier relie le vecteur densité de courant de chaleur $\vec{j}_Q$ et la température T dans le cas du transfert thermique par **conduction**.

[2] En physique, les intégrales doubles sur des surfaces s'appellent des flux.
[3] Phénoménologique veut dire qui vient de l'expérience.

Loi de Fourier

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- Le transport de chaleur se fait par conduction.

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T$$

Avec

- $\vec{j}_Q$ vecteur densité de courant de chaleur ($\text{Jm}^{-2}\text{s}^{-1}$)
- λ la conductivité thermique ($\text{Jm}^{-1}\text{s}^{-1}\text{K}^{-1}$)
- T la température (K)

La conductivité thermique λ permet de mesurer la facilité avec laquelle un matériau transporte la chaleur.

Ordres de grandeur de la conductivité thermique

- $\lambda_{\text{air}} \sim 10^{-2}\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- $\lambda_{\text{eau}} \sim 10^{-1}\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- $\lambda_{\text{béton}} \sim 1\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
- $\lambda_{\text{acier}} \sim 10^{1}\,\text{J}\cdot\text{s}^{-1}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$

Le signe « $-$ » dans la loi de Fourier traduit le sens de déplacement de la chaleur : toujours du chaud vers le froid.

Application 7

Déterminer le vecteur densité de courant thermique pour le champ de température

$$T(x, y, z) = \frac{xy}{z}\frac{T_0}{l}.$$

3 Équation de la diffusion thermique

3.1 Bilan d'énergie

Le premier principe de la thermodynamique traduit la conservation de l'énergie, c'est-à dire que l'énergie ne peut pas être créée ou détruite, elle ne peut que se transformer d'une forme à l'autre.

Exemple

Quand un vélo freine, son énergie mécanique se transforme en énergie thermique.

Quand une grandeur se conserve, on peut en faire le bilan.

Faire le bilan d'une grandeur dans un système veut dire compter combien de cette grandeur rentre dans ce système et combien y est créée. On ne s'intéresse qu'au flux rentrant car un flux sortant est un flux entrant de sens opposé.

En faisant un bilan sur un volume infinitésimale entre t et $t + dt$, on aboutit à l'équation locale de conservation de l'énergie.

Équation locale de conservation de l'énergie ♥ ✎[8]

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

---

$$\mu\frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}_Q + \mathcal{P}_v$$

Avec

- μ la masse volumique ($\mathrm{kgm^{-3}}$)
- u l'énergie interne massique ($\mathrm{Jkg^{-1}}$)
- $\vec{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{Js^{-1}m^{-2}}$)
- $\mathcal{P}_v$ la puissance volumique convertie en chaleur (par effet Joule, ...) ($\mathrm{Js^{-1}m^{-3}}$). Ce terme est appelé terme source.

3.2 Équation de la diffusion thermique

Lorsqu'on remplace le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}_Q$ grâce à la loi de Fourier dans l'équation locale de conservation de l'énergie, on aboutit à l'équation de la diffusion thermique.

Équation de la diffusion thermique ♥ ✎[9]

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

---

$$\frac{\partial T}{\partial t} - D_{\text{th}}\Delta T = \frac{\mathcal{P}_v}{\mu.C_V}$$

Avec

- T la température (T)
- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu C_V}$ le coefficient de diffusion thermique (=diffusivité thermique) ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)
- μ la masse volumique ($\mathrm{kgm^{-3}}$)
- C_V la capacité thermique massique ($\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}}$)
- λ la conductivité thermique ($\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$)
- $\mathcal{P}_v$ est la puissance volumique convertie en chaleur (par effet Joule, ...) ($\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-3}}$)

3.3 Analyse en ordres de grandeurs

Approximation d'une dérivée par le taux d'accroissement ♥

$$\frac{\partial f}{\partial x} \sim \frac{F}{l}$$

Avec

- f une fonction d'une ou plusieurs variable, dont x
- F un ordre de grandeur des variations de f
- l un ordre de grandeur des variations de x

Si on analyse en ordres de grandeurs l'équation de diffusion thermique, on peut trouver la durée que met une variation de température à parcourir une certaine distance.

Durée caractéristique de propagation d'une variation de température

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

---

$$\tau = \frac{l^2}{D_{\text{th}}}$$

Avec

- τ la durée caractéristique (s)
- l la distance à parcourir (m)
- D_{th} le coefficient de diffusion thermique ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)

Comme la durée caractéristique dépend de l^2, l'onde de température ralenti en se propageant : elle met 4 fois plus de temps pour parcourir une distance 2 fois plus grande.

Application 10

Si je plonge une cuillère de 20 cm en acier ($\mu = SI8e3kg.m^3$, $C_V = 4 \times 10^2\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-}1}$) dans une casserole d'eau bouillante, quel est l'ordre de grandeur de la durée au bout de laquelle la queue de la cuillère devient chaude ?

3.4 Irréversibilité

Si, quand on remplace t par $-t$ dans l'équation on obtient une équation différente, l'équation est irréversible.

Si une vidéo d'un phénomène irréversible est passée à l'envers, on s'en rend compte.

Application 11

L'équation de diffusion thermique est-elle irréversible ?

Application 12

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$ est-elle irréversible ?

L'équation de la diffusion thermique est irréversible.

3.5 conditions aux limites

Condition sur le flux Le flux thermique est toujours continu.

continuité du flux thermique 13

$$\varphi(x^+) = \varphi(x^-)$$

Condition sur la température S'il y a **contact thermique parfait**, la température est continue.

3.6 conditions aux limites

Condition sur le flux Le flux thermique est toujours continu.

continuité du flux thermique

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile
- Il y a contact thermique parfait

$$T(x^+) = T(x^-)$$

4 ARQS et résistance thermique

4.1 Approximation du régime quasi-stationnaire (ARQS)

Dans l'ARQS, les grandeurs ne varient pas très vite avec le temps. Dans l'ARQS, on peut négliger les dérivées partielles par rapport au temps ($\frac{\partial}{\partial t}$). Dans l'ARQS, la durée que met une variation de température à parcourir le système est très courte devant la durée caractéristique de variation de la température.

Condition de l'ARQS [14]

$$L^2 \ll D_{\mathrm{th}} \tau$$

Avec

- L la longueur du système (m)
- D_{th} le coefficient de diffusion ($\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$)
- τ la durée caractéristique de variation de la température (s) (période, ...)

4.2 Tube de champ

Pour un champ vectoriel[4], une ligne de champ est une ligne qui est colinéaire en tout point avec le champ de vecteur.

Schéma Ligne de champ

Pour un champ vectoriel, un tube de champ est un ensemble de lignes de champ passant tous par une même courbe fermée. Un tube de champ est une surface.

[4] Un champ vectoriel est une fonction qui à tout point de l'espace associe un vecteur

SCHÉMA Tube de champ

4.3 Conservation du flux de $\overrightarrow{j}_Q$

Équation locale de conservation de l'énergie en régime stationnaire 15

Hypothèses

- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile
- en l'absence de terme source[a]
- dans l'ARQS

$$\operatorname{div} \overrightarrow{j}_Q = 0$$

Avec $\overrightarrow{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$)

[a] Sans terme source veut dire $\mathcal{P}_{\text{th}} = 0$.

Si le flux d'une grandeur est le même sur n'importe quelle section d'un tube de champ, et ce pour n'importe quel tube de champ, on dit que la grandeur est à flux conservatif.

Conservativité du flux de $\overrightarrow{j}_Q$ 16

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

$\overrightarrow{j}_Q$ est à flux conservatif

Avec $\overrightarrow{j}_Q$ le vecteur densité de courant thermique ($\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}}$)

4.4 Résistance thermique

Pour un cylindre, la différence de température entre ses extrémités est proportionnelle avec le flux thermique. Le facteur de proportionnalité s'appelle la **résistance thermique**.

Équivalent thermique de la loi d'Ohm

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}}\varphi$$

Avec

- T_1 et T_2 les température (K)
- R_{th} la résistance thermique en $(\text{K} \cdot \text{W}^{-1})$
- φ le flux thermique en $(\text{J} \cdot \text{s}^{-1})$

Schéma

Résistance thermique d'un cylindre 17

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile
- pas de pertes latérales (cylindre calorifugé)

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{S\lambda}$$

Avec

- R_{th} la résistance thermique en $(\text{K} \cdot \text{W}^{-1})$
- S la section du cylindre en (m^2)
- L la longueur du cylindre en (m)
- λ la conductivité thermique $(\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$

4.5 Association de résistances thermiques

Association en série Si deux résistances thermiques sont en série, elles sont traversées par le même flux thermique.

Schéma Résistances thermiques en série

Exemple

Double vitrage, isolation d'un mur, ...

Association en série de deux résistances thermiques [18]

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

$$R_{\text{th, éq}} = R_{\text{th},1} + R_{\text{th},2}$$

Avec

- $R_{\text{th, éq}}$ la résistance thermique équivalente ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)
- $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$ les résistances thermique en série ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)

Application [19]

Déterminer la résistance thermique équivalente d'un double vitrage. Chaque vitre a une épaisseur 1 cm, de même que l'air entre les deux. La surface de la fenêtre est $1\,\text{m}^2$. $\lambda_{\text{verre}} = 1\,\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$

Association en parallèle Si deux résistances thermiques sont en parallèle, elles sont soumises à la même différence de température.

Schéma Résistances thermiques en parallèle

Exemple

Fenêtre dans un mur, ...

Association en parallèle de deux résistances thermiques [20]

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

$$\frac{1}{R_{\text{th, éq}}} = \frac{1}{R_{\text{th},1}} + \frac{1}{R_{\text{th},2}}$$

Avec

- $R_{\text{th, éq}}$ la résistance thermique équivalente ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)
- $R_{\text{th},1}$ et $R_{\text{th},2}$ les résistances thermique en parallèle ($\text{K} \cdot \text{W}^{-1}$)

Application [21]

Déterminer la résistance thermique équivalente d'une gigoteuse de surface $0{,}5\,\mathrm{m}^2$ et de TOG[a] 2 et d'un bonnet de surface $400\,\mathrm{cm}^2$ et de TOG 1.

[a] Le TOG est une unité inverse de la résistance thermique surfacique. 1 TOG correspond à $0{,}1\,\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$

4.6 Circuit RC thermique

Le circuit RC thermique correspond à une capacité thermique en contact avec un thermostat à travers une résistance thermique.

Exemple

Le circuit RC thermique peut modéliser le refroidissement du contenu d'une tasse ou le réchauffement d'un petit pois dans une casserole d'eau.

Évolution de la température pour le circuit RC thermique [22]

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile
- température uniforme dans le système

$$T(t) = T_0 + \left(1 - \exp(-\frac{t}{R_{\mathrm{th}} C_V})\right) T_{\mathrm{ext}}$$

Avec

- $T(t)$ la température du système à l'instant t (K)
- T_0 la température initiale du système (K)
- T_{est} la température du thermostat (K)
- R_{th} la résistance thermique qui sépare le système du thermostat ($\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1}$)
- C_V la capacité thermique su système ($\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1}$)

Schéma

4.7 Analogie avec l'électrocinétique

On peut faire une analogie entre l'électrocinétique et la thermique.

Analogie entre électrocinétique et thermique

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- dans l'ARQS
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile

	Thermique	Électrocinétique
Flux	$\varphi = \iint_S \overrightarrow{j}_Q . \overrightarrow{dS}$ (W)	
Vecteur densité de courant	$\overrightarrow{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\mathrm{grad}} T$ $(\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2})$	
Conservation	$\mathrm{div}\, \overrightarrow{j}_Q = 0$	
Résistance	$R_{\mathrm{th}} = \frac{L}{\lambda S}$ $(\mathrm{K} \cdot \mathrm{W}^{-1})$	$R =$ (Ω)
	Schéma Convention	Schéma Convention
Loi d'Ohm	$T_1 - T_2 = R_{\mathrm{th}} \phi$ (K)	$V_1 - V_2 = RI$ (V)
Capacité	C_V $(\mathrm{J} \cdot \mathrm{K}^{-1})$	C (F)
Équation différentielle pour un RC	$R_{\mathrm{th}} C_V \frac{dT}{dt} + T = T_{\mathrm{ext}}$	$RC \frac{du}{dt} + u = E$

5 Ondes thermiques

Des ondes peuvent être solution de l'équation de la diffusion thermique. L'équation de la diffusion thermique est linéaire[5] Pour toutes les équations linéaires, on s'intéresse aux solutions sinusoïdales.

[5] Une équation est linéaire si pour tous f et g solution de l'équation ,$\lambda f + \mu g$ est aussi solution.

Solutions sinusoïdales de l'équation de la diffusion thermique [23]

Hypothèses

- en l'absence de terme source
- le système est à l'équilibre thermodynamique local
- le système est incompressible et macroscopiquement immobile
- la température de dépend que de la coordonnée cartésienne x
- le système est latéralement calorifugé

$$T(x,t) = T_0 + \Theta_0 \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) e^{-\frac{x}{\delta}}$$

Avec

- $T(x,t)$ la température du système à l'instant t et à l'abscisse x (K)
- T_0 la valeur moyenne de la température (K)
- Θ_0 l'amplitude des variations de température (K)
- ω la pulsation ($\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- $\delta = \sqrt{\frac{2D_{\text{th}}}{\omega}}$ la profondeur de peau (m)
- $D_{\text{th}} = \frac{\lambda}{\mu C_V}$ le coefficient de diffusion thermique ($\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)

Schéma

L'amplitude des ondes thermiques diminue quand elles se propagent (terme en $e^{-\frac{x}{\delta}}$). La relation qui relie la pulsation spatiale ($\frac{1}{\delta}$) et ω s'appelle la relation de dispersion.

Pour une distance supérieure à quelques fois la profondeur de peau, la température est quasiment égale à T_0.

Application [24]

Pour un sol de diffusivité thermique $D_{\text{th}} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, déterminer la profondeur de peau pour une période de 1 jour et pour une période de 1 an.

Méthodes

1 Faire un bilan infinitésimale

Pour faire un bilan d'une grandeur sur un système infinitésimal :

1. S'assurer que la grandeur est conservative et si besoin, le justifier.
2. Représenter le système.
3. Déterminer les surfaces qui sont traversées par un flux et déterminer leur aire.
4. En déduire le flux net rentrant en multipliant les aires par les vecteurs densité de courant. Attention aux orientations des surfaces !
5. Déterminer le volume du système.
6. En déduire la grandeur nette "créée" par unité de temps dans la système.
7. Écrire l'égalité entre la variation de la grandeur entre t et $t + dt$ d'une part et la grandeur rentrant entre t et $t + dt$ plus la grandeur créée entre t et $t + dt$ d'autre part.

Application 25

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un volume infinitésimal en coordonnées cylindriques, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées cylindriques.

Application 26

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un volume infinitésimal en coordonnées sphériques, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

Application 27

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur un cylindre creux d'épaisseur infinitésimale, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées cylindriques.

Application 28

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r et de t. En effectuant un bilan sur une coquille creuse d'épaisseur infinitésimale, déterminer l'équation locale de conservation de l'énergie en coordonnées sphériques.

2 Utiliser la conservativité du flux de $\overrightarrow{j}$

On peut utiliser cette propriété pour déterminer les dépendances de $\overrightarrow{j}$ ou pour relier $\overrightarrow{j}$ en deux points de l'espace.

1. Trouver un tube de champ allant d'un point à l'autre.
2. Déterminer la section des tubes de champ aux niveaux des deux points.
3. Exprimer les flux de $\overrightarrow{j}$ aux niveaux des deux points.
4. Écrire l'égalité entre ces deux flux.

Application [29]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{j} = j\vec{e_r}$ à flux conservatif. Relier $\vec{j}(R_1)$ et $\vec{j}(R_2)$.

Application [30]

On se place en coordonnées sphériques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{j} = j\vec{e_r}$ à flux conservatif. Relier $\vec{j}(R_1)$ et $\vec{j}(R_2)$.

Application [31]

On se place en coordonnées cylindriques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{j} = j\vec{e}_r$ à flux conservatif. Montrer que $\vec{j}(r) = \frac{cte}{r}\vec{e}_r$.

Application [32]

On se place en coordonnées sphériques et on suppose que les grandeurs ne dépendent que de r. On suppose $\vec{j} = j\vec{e_r}$ à flux conservatif. Montrer que $\vec{j}(r) = \frac{cte}{r^2}\vec{e}_r$.

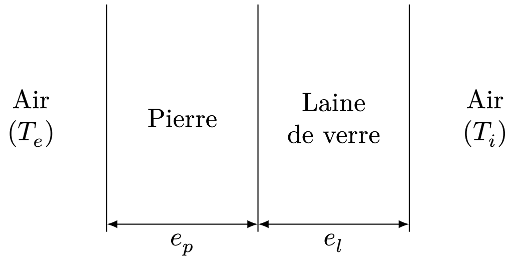
TD

1 Conduction thermique dans un mur

On s'intéresse à un mur de surface $S = 30\,\mathrm{m}^2$ qui sépare l'intérieur d'une maison de son extérieur. Le mur est constitué d'une épaisseur $e_p = 30\,\mathrm{cm}$ de pierre de conductivité thermique $\lambda_p = 2{,}2\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ et d'une épaisseur $e_l = 15\,\mathrm{cm}$ de laine de verre de de conductivité thermique $\lambda_l = 0{,}03\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$.

L'intérieur de la maison est à une température $T_i = 20\,°\mathrm{C}$ et l'extérieur à $T_e = 5\,°\mathrm{C}$. Pour un fluide en contact avec un solide, le vecteur densité de courant thermique $\vec{j}$ suit la loi de Newton : $\vec{j} = h(T_s - T_\infty)\vec{e}$ où $\vec{e}$ est un vecteur unitaire dirigé du solide vers le fluide, $h = 10\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ pour l'air, T_s la température du solide à sa surface et T_∞ la température du fluide loin du solide.

L'étude s'intéresse au régime stationnaire.



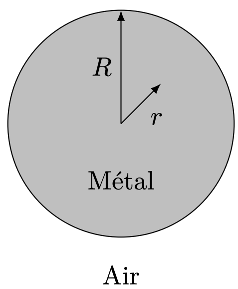
1. Quelles sont les conditions aux limites vérifiées à chaque interface (par T ou par $\vec{j}$) ?
2. Calculer la résistance thermique associée à chaque partie du mur.
3. Montrer que la loi de Newton peut donner lieu à une résistance thermique qu'on précisera.
4. Tracer le circuit équivalent et calculer la résistance équivalente.
5. Quelle puissance doit fournir le radiateur de la pièce ?

2 Fil parcouru par un courant électrique

Un fil de rayon R, de longueur infinie, de conductivité thermique λ, de conductivité électrique γ, de capacité thermique massique c, de masse volumique ρ est parcouru par un courant électrique constant et uniforme d'intensité I.

On note $\vec{j}_{\text{élec}}$ le vecteur densité de courant électrique et $\vec{j}_{\text{thé}}$ le vecteur densité de courant thermique.

On se placera en coordonnées cylindriques.



1. Dans quelle direction de déplace les charges ? Même question pour la chaleur.
2. Établir l'équation de la diffusion thermique.
3. Intégrer l'équation de diffusion pour une température extérieure du fil T_0 connue. Tracer $T(r)$.
4. Intégrer l'équation de diffusion avec comme condition aux limites la loi de Newton : $\vec{j}_{\text{thé}} = h(T(R) - T_{\text{air}})\vec{e}$ où $\vec{e}$ est dirigé vers l'extérieur du fil.
5. Tracer $T(r)$.

3 Size of marine mammals

Marine mammals are warm-blooded animas whose temperature remain constant. To maintain this temperature, exothermal reactions happen in their cells and produce a volumetric power a. The total power produced by the mammal is P.

To simplify, mammals are described as spheres of radius R, immersed in immobile water of thermal conductivity λ and which temperature is T_∞ far away from the animal.

1. Establish the thermal diffusion equation in water (in spherical coordinates).
2. Ascertain the temperature $T(r)$ around the animal.
3. Determine the thermal power lost by the mammal by integrating $\vec{j}_{\text{th}}$.
4. Explain why there is no small aquatic mammal.

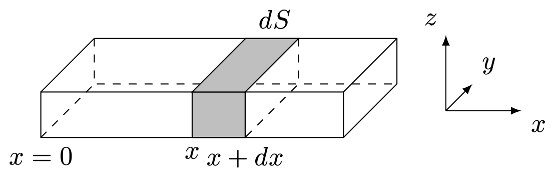
4 Ailette de refroidissement ★

La performance des puces électroniques utilisées dans les ordinateurs décroit avec leur température. Afin de dissiper une puissance élevée en limitant la température du composant, on installe un dissipateur de chaleur. Ce dissipateur est muni d'ailettes de refroidissement. On étudie une de ces ailettes.

Une ailette de refroidissement en aluminium de conductivité thermique $\lambda = 200\,\mathrm{W\cdot m^{-1}\cdot K^{-1}}$ est fixée en $x = 0$ à un corps dont la température $T_0 = 70\,°\mathrm{C}$ est constante. Elle baigne dans l'air ambiant de température $T_a = 20\,°\mathrm{C}$. Le corps à la température T_0 occupe le demi espace $x < 0$. L'ailette est en forme de parallélépipède, d'épaisseur $e = 5\,\mathrm{mm}$, de largeur $a = 5\,\mathrm{cm}$ et de longueur $l = 1\,\mathrm{cm}$.

On émet les hypothèses suivantes :

- le régime étudié est stationnaire
- la température d'un point de l'ailette n'est fonction que de x
- $a \gg e$
- la puissance cédée à l'air extérieur par la surface latérale dS d'un élément de longueur dx (échanges conducto-convectifs) obéit à la loi de Newton : $d\mathcal{P} = h(T(x) - T_a)dS$ avec $h = 50\,\mathrm{SI}$.



1. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ peut se mettre sous la forme $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T(x)-T_a}{L^2} = 0$ où on exprimera L en fonction de λ, h et e. Calculer la valeur numérique de L.
2. Justifier les deux conditions aux limites suivantes : $T(0) = T_0$ et $-\lambda\frac{dT}{dx}(x = l) = h(T(l) - T_a)$.
3. Mettre $T(x)$ en fonction de x sous la forme : $T(x) = T_1 + T_2(\cosh(\frac{x}{L}) - f(l, L, \lambda, h)\sinh(\frac{x}{L}))$.
4. Montrer que compte tenu de la longueur de l'ailette, la température de l'ailette est approximativement constante et égale à T_0 (on montrera que l'erreur relative commise sous cette hypothèse est inférieur à 1%). On considère maintenant la température de l'ailette égale à T_0.
5. Calculer l'expression de la puissance thermique $\mathcal{P}$ échangée entre l'ailette et l'air.
6. Déterminer la puissance thermique $\mathcal{P}'$ échangée entre le corps de température T_0 et l'air ambiant par la surface d'air $S' = Av$ en l'absence d'ailette (S' est la surface de la base de l'ailette). En déduire l'expression de l'efficacité $\eta = \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}'}$. Calculer la valeur.