Phénomènes de transport 4
Fluide en écoulement

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
- ❑ Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
- ❑ Définir une ligne de courant, un tube de courant.
- ❑ Associer la dérivée particulaire du vecteur vitesse à l'accélération de la particule de fluide qui passe en un point.
- ❑ Citer et utiliser l'expression de l'accélération avec le terme convectif sous la forme $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}$.
- ❑ Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
- ❑ Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur $\mu\vec{v}$ à travers une surface orientée.
- ❑ Énoncer l'équation locale traduisant la conservation de la masse.
- ❑ Exploiter la conservation du débit massique le long d'un tube de courant.
- ❑ Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de $\vec{v}$ à travers une surface orientée.
- ❑ Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme et relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé.
- ❑ Exploiter la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.
- ❑ Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface.
- ❑ Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression $-\overrightarrow{\text{grad}}P$.
- ❑ Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
- ❑ Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle.
- ❑ Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau.
- ❑ Exploiter la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
- ❑ Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
- ❑ Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
- ❑ Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion.
- ❑ Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection.
- ❑ Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
- ❑ Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique.
- ❑ Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque.
- ❑ Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.
- ❑ Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
- ❑ Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
- ❑ Définir et orienter les forces de portance et de traînée.
- ❑ Exploiter les graphes de C_x et C_z en fonction de l'angle d'incidence.

Résumé du cours

1 Description de l'écoulement d'un fluide

Un fluide est un milieu matériel parfaitement déformable. Les liquides et les gaz sont des fluides.

1.1 Notion de particule de fluide

À l'échelle microscopique, les particules qui composent un fluide sont animés de mouvements erratiques[1].
Il y a deux façons de définir un système mésoscopique :

- On peut définir un volume mésoscopique immobile, comme on l'a fait dans le chapitre diffusion de particules. Un tel volume peut contenir un nombre de particules variable au cours du temps.
- On peut définir un volume mésoscopique qui contient toujours le même nombre de particules (en moyenne) et qui se déplace avec le fluide[2]. Ce système est appelé **particule de fluide**. Une particule de fluide est un système fermé.

La masse d'une particule de fluide est donc constante.

1.2 Description eulérienne et champ de vitesse

La description eulérienne consiste à décrire le champ de vitesse, c'est-à-dire la vitesse du fluide à chaque endroit de l'espace : $\vec{v}(M,t)$

La vitesse en un même point et à des instants différents $\vec{v}(M,t_1)$ et $\vec{v}(M,t_2)$ est la vitesse de particules de fluide différentes.

1.3 Tube de courant

Une ligne de courant est une courbe en tout point tangente au vecteur vitesse $\vec{v}(M,t)$ et orientée dans le même sens.

Schéma Ligne de courant

En régime stationnaire, les lignes de courant sont immobiles. En régime stationnaire, les lignes de courant sont les trajectoires des particules de fluide.

Attention : de manière générale, les lignes de courant ne sont pas forcément les trajectoires des particules de fluide.

[1] Erratique signifie aléatoire, qui vont dans tous les sens.
[2] Plus précisément, dont la vitesse est la vitesse moyenne des particules qui la composent.

1.4 Dérivée particulaire

Dérivée particulaire [1]

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})f$$

Avec

- $\frac{\partial f}{\partial t}$ est le terme local
- $(\vec{v}.\overrightarrow{\text{grad}})f$ est le terme convectif
- $\vec{v}$ est la vitesse du fluide (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

1.5 Débit massique

Masses volumique à connaître

- $\mu_{\text{eau}} = 1 \times 10^3 \,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- $\mu_{\text{air}} = 1 \,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Vecteur densité de courant de masse [2]

$$\vec{j}_m = \mu \vec{v}$$

Avec

- $\vec{j}_m$ le vecteur densité de courant de masse (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)
- μ la masse volumique (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- $\vec{v}$ la vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Débit massique [3]

$$D_m = \iint_S \mu \vec{v}.\overrightarrow{dS}$$

Avec

- D_m le débit massique (en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$)
- μ la masse volumique (en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)
- $\vec{v}$ la vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Application [4]

Le débit maximal de l'odet a été mesuré le 13 décembre 2000. La vitesse (supposée unifrome) vallait $4 \,\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Sa largeur est de 10 m et sa profondeur 4 m. Déterminer le débit massique.

1.6 Débit volumique

Vecteur densité de courant de volume [5]

$$\vec{j}_V = \vec{v}$$

Avec

- $\vec{j}_V$ le vecteur densité de courant de volume (en $\text{m}^3 \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)
- $\vec{v}$ la vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)

Débit volumique [6]

$$D_V = \iint_S \vec{v}.\vec{dS}$$

Avec

- D_V le débit volumique (en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$)
- $\vec{v}$ la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Application [7]

Le débit maximal de l'odet a été mesuré le 13 décembre 2000. La vitesse (supposée unifrome) vallait $4\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Sa largeur est de $10\,\mathrm{m}$ et sa profondeur $4\,\mathrm{m}$. Déterminer le débit volumique.

1.7 Conservation de la masse

La masse est une grandeur physique conservative.

Équation locale de conservation de la masse [8]

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\mu \vec{v}\right)$$

Avec

- μ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
- $\vec{v}$ la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Conservativité du débit massique [9]

Hypothèses Le régime est stationnaire

Le débit massique est le même sur chaque section d'un tube de courant.

1.8 Écoulement incompressible et homogène

Dans un écoulement incompressible et homogène, la masse volumique μ est uniforme[3] et stationnaire[4].
Le volume n'est pas nécessairement une grandeur conservative.

Exemple

Si on compresse une seringue contenant un gaz, son volume diminue.

Conservation du volume [10]

Hypothèses

- L'écoulement est incompressible et homogène

Le volume se conserve.

Conservativité du débit volumique [11]

Hypothèses

- L'écoulement est incompressible et homogène

Le débit volumique est le même sur toute section d'un tube de courant.

[3] Uniforme signifie qui ne dépend pas de la position : c'est le même partout.
[4] Stationnaire signifie qui ne dépend pas du temps : c'est le même tout le temps.

2 Actions de contact sur un fluide

2.1 Action normale et tangentielle

Les forces de contact s'exerçant sur la surface d'une particule de fluide sont proportionnelles à sa surface. Elles peuvent se décompose en

- une composante orthogonale à la surface (normale) appelée force de pression
- une composante tangentielle à la surface appelée force de viscosité

2.2 Forces de pression

Forces de pression

$$\overrightarrow{\delta F}_P = P\overrightarrow{dS}$$

Avec

- $\overrightarrow{\delta F}_P$ la force de pression (en N)
- P la pression (en Pa)
- $\overrightarrow{dS}$ la surface (en m^2)

Résultante volumique des forces de pression [12]

$$\overrightarrow{\Phi}_P = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P$$

Avec

- $\overrightarrow{\Phi}_P$ la force volumique (en $N \cdot m^{-3}$)
- P la pression (en Pa)

Relation fondamentale de l'hydrostatique [13]

Hypothèses

- Le fluide est au repos
- Les seules forces sont les forces de pression et le poids

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = \mu\vec{g}$$

Avec

- P la pression (en Pa)
- μ la masse volumique (en $kg \cdot m^{-3}$)
- $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur (en $m \cdot s^{-2}$)

Application [14]

Déterminer le champ de pression dans l'océan en le supposant homogène, incompressible et au repos.

Application [15]

Déterminer le champ de pression dans l'atmosphère la supposant immobile et isotherme et en assimilant l'air à un gaz parfait.

2.3 Forces tangentielles

La force tangentielle est due à la viscosité du fluide.

Forces de viscosité

Hypothèses

- Le fluide est newtonien.
- La surface sur laquelle s'exerce la force est orientée selon $\overrightarrow{e_y}$.

Schéma

Avec

- $\overrightarrow{\delta F_v}$ la force exercée sur la surface $\overrightarrow{dS}$ (en N)
- η la viscosité dynamique (en Pl=Pa · s)
- v le champ de vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial y}$ le taux de cisaillement (en $\mathrm{s^{-1}}$)
- dS la surface (en $\mathrm{m^2}$)

$$\overrightarrow{\delta F_v} = \eta \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} dS$$

Cette formule doit être adaptée en fonction des axes du problème.

Viscosité à connaître

Hypothèses à 20 °C

$$\eta_{\text{eau}} = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pl}$$

Comme la force ne peut pas diverger, le champ de vitesse est dérivable donc continu.

En particulier, la vitesse d'un fluide au voisinage immédiat d'un solide est la vitesse du solide. Cette condition est appelée condition d'adhérence fluide-solide.

Application 16

Écoulemet de Couette-plan : un fluide est en écoulement stationnaire entre deux plaques parallèles, l'une immobile (en $z = 0$) et l'autre annimée d'une vitesse $V = V\overrightarrow{e_x}$ (en $z = a$). On néglige les effets de la gravité et on suppose la pression uniforme. Déterminer le champ de vitesse dans le fluide. On supposera que la vitesse ne dépend que de z et qu'elle est selon x : $\vec{v} = v(z)\overrightarrow{e_x}$.

3 Écoulement interne incompressible et homogène dans une conduite cylindrique

On s'intéresse à un écoulement à l'intérieure une conduite cylindrique.

Exemple

Eau dans le réseau d'eau potable.

3.1 Vitesse débitante

La vitesse débitante est la vitesse qu'aurait le fluide si le champ de vitesse était uniforme tout en conservant le même débit volumique.

Vitesse débitante

$$U = \frac{D_V}{S}$$

Avec

- U la vitesse débitante (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- D_V le débit volumique (en $\mathrm{m^3 \cdot s^{-1}}$)
- S la section de la conduite (en $\mathrm{m^2}$)

La vitesse débitante peut être vue comme la moyenne de la vitesse sur une section de la conduite : $U = \frac{\iint_S \vec{v}.\vec{dS}}{S}$.

3.2 Régimes d'écoulement

Reynolds a mis en évidence expérimentalement deux régimes d'écoulement.

Schéma Expérience de Reynolds

En fonction du débit, on peut observer

le régiment laminaire dans lequel les lignes de courant sont stationnaires, pour des vitesses débitantes faibles

le régime turbulent dans lequel les lignes de courant se déforment, pour des vitesses débitantes importantes.

Les deux régimes d'écoulement diffèrent par le mode de transport de quantité de mouvement prépondérant.

3.3 Transport de quantité de mouvement par diffusion

Dans le régime laminaire, la quantité de mouvement est essentiellement transportée par diffusion.

Vecteur densité de courant de quantité de mouvement diffusée [17]

Hypothèses Le fluide est newtonien

$$\vec{j}_{p,\mathrm{diff}} = -\nu \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mu v)$$

Avec

- $\vec{j}_{p,\mathrm{diff}}$ le vecteur densité de courant de quantité de mouvement transportée par diffusion (en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$)
- $\nu = \frac{eta}{\mu}$ la viscosité cinématique (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)
- μ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- μv la quantité de mouvement volumique (en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m^{-3}}$)

Temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement [18]

$$\tau_{\text{diff}} \sim \frac{L^2}{\nu}$$

Avec

- τ_{diff} le temps caractéristique associé à la diffusion de quantité de mouvement (en s)
- L une longueur caractéristique du problème (en m)
- $\nu = \frac{eta}{\mu}$ la viscosité cinématique (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)

3.4 Transport de quantité de mouvement par convection

Dans le régime turbulent, la quantité de mouvement est essentiellement transportée par convection.

Vecteur densité de courant de quantité de mouvement convectée [19]

$$\vec{j}_{p,\text{conv}} = \mu v \vec{v}$$

Avec

- $\vec{j}_{p,\text{conv}}$ le vecteur densité de courant de quantité de mouvement transportée par convection (en $\mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^{-1}}$)
- μ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
- v le champ de vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

Temps caractéristique de convection de quantité de mouvement [20]

$$\tau_{\text{conv}} \sim \frac{L}{U}$$

Avec

- τ_{conv} le temps caractéristique associé à la convection de quantité de mouvement (en s)
- L une longueur caractéristique du problème (en m)
- U la vitesse débitante (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)

3.5 Nombre de Reynolds

Le nombre de Reynolds sert à comparer l'importance relative du transport de quantité de mouvement par convection et par diffusion.

Nombre de Reynolds

Hypothèses le fluide est newtonien

$$R_e = \frac{Ud}{\nu}$$

Avec

- R_e le nombre de Reynolds (sans unité)
- d une longueur caractéristique du problème (en m)
- U la vitesse débitante (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- $\nu = \frac{\eta}{\mu}$ la viscosité cinématique (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)

Dans le cadre d'un écoulement interne à une conduite cylindrique, la longueur caractéristique d est le diamètre de la conduite.

Nombre de Reynolds et diffusion VS convection [21]

Hypothèses le fluide est newtonien

$$R_e \sim \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}}$$

Avec

- R_e le nombre de Reynolds (sans unité)
- τ_{conv} le temps caractéristique associé à la convection de quantité de mouvement (en s)
- τ_{diff} le temps caractéristique associé à la diffusion de quantité de mouvement (en s)

Expérimentalement, on peut établir le seuil de passage d'un régime laminaire à un régime turbulent.

Seuil de turbulence

Hypothèses

- Le fluide est newtonien
- L'écoulement est interne à une conduite

- Si $R_e < 2000$ l'écoulement est laminaire
- Si $R_e > 2000$ l'écoulement est turbulent

Avec R_e le nombre de Reynolds (sans unité)

Application [22]

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite de diamètre 5 cm et de longueur 30 m à la vitesse débitante de 0,1 m · s^{-1}. L'écoulement est-il laminaire ou turbulent ?

3.6 Chute de pression dans une conduite horizontale à faible nombre de Reynolds

Loi de Haggen-Pouisseuille [23]

Hypothèses

- Le fluide est newtonien
- La conduite est horizontale
- L'effet de la gravité est négligé
- L'écoulement est laminaire
- le champ de pression ne dépend que de x

$$D_V = \frac{\pi R^4}{8\eta L}\Delta P$$

Avec

- D_V le débit volumique (en m$^3 \cdot$ s^{-1})
- R le rayon de la conduite (en m)
- η la viscosité dynamique (en Pl)
- L la longueur de la conduite (en m)
- ΔP la différence de pression entre les extrémités de la conduite (en Pa)

Par analogie avec l'électrocinétique, on peut définir la résistance hydraulique.

Résistance hydraulique 24

Hypothèses

- Le fluide est newtonien
- La conduite est horizontale
- L'effet de la gravité est négligé
- L'écoulement est laminaire

$$R_H = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

Avec

- R_H la résistance hydraulique (en $\mathrm{Pa \cdot s \cdot m^{-3}}$[a])
- R le rayon de la conduite (en m)
- η la viscosité dynamique (en Pl)
- L la longueur de la conduite (en m)
- ΔP la différence de pression entre les extrémités de la conduite (en Pa)

[a] Attention : pas en Ω !

Application 25

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite de diamètre 5 cm et de longueur 30 m à la vitesse débitante de $0{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Quelle est la chute de pression entre les deux extrémités de la conduite ?

3.7 Chute de pression pour un écoulement quelconque

Lorsque l'écoulement n'est pas laminaire, la loi de Haggen-Pouisseuille n'est plus vraie. Il est alors nécessaire de s'en remettre aux données expérimentales qui sont résumées sur un diagramme appelé diagramme de Moody.

Application 26

De l'eau à 20 °C circule dans une conduite en fonte de diamètre 1,5 cm et de longueur 3 m à la vitesse débitante de $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Quelle est la chute de pression entre les deux extrémités de la conduite ?

4 Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

4.1 Force et coefficient de trainée

Lorsqu'un objet est en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide, il subit des forces de pression et de viscosité. La résultante de ces forces dans la direction du mouvement est appelée trainée.

Le maitre-couple (ou surface apparente) est la surface projetée dans une certaine direction.

Schéma Maître couple

Application [27]

Calculer le maitre couple dans la direction du mouvement pour la voiture ci-dessous. On pourra approximer la voiture à un parallèlépipède rectangle pour faire les calculs.

Force de traînée

$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\mu v^2 S C_x \overrightarrow{u}$$

Avec

- $\overrightarrow{F}$ la force de trainée (en N)
- μ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
- v la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- S le maitre-couple (en $\mathrm{m^2}$)
- C_x le coefficient de trainée (sans unité)
- $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ un vecteur unitaire de même sens et direction que $\overrightarrow{v}$ (sans unité)

Le coefficient de trainée dépend de la forme de l'objet et du nombre de Reynolds.

4.2 Cas d'une sphère

Le coefficient de trainée de la sphère est tracé en fonction du nombre de Reynolds dans la courbe en annexe. On peut y voir plusieurs parties.

4.2.1 Faible Reynolds

Pour $R_e < 1$, le graphe s'approche d'une droite (en échelle logarithmique) d'équation $C_x = \frac{24}{R_e}$.

Force de trainée linéaire [28]

Hypothèses

- Le fluide est newtonien
- $R_e < 1$
- L'objet est sphérique

$$\overrightarrow{F} = -\alpha \overrightarrow{v}$$

Avec

- $\overrightarrow{F}$ la force de trainée (en N)
- v la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- α le coefficient de frottement (sans unité)

4.3 Haut Reynolds

Pour $R_e \in [2000, 200\,000]$, C_x est constant.

Force de trainée quadratique

Hypothèses

- Le fluide est newtonien
- $R_e \in [2000, 200\,000]$
- L'objet est sphérique

$$\overrightarrow{F} = -\alpha v^2 \overrightarrow{u}$$

Avec

- $\overrightarrow{F}$ la force de trainée (en N)
- v la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- α le coefficient de frottement (sans unité)
-
- $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{v}\|}$ un vecteur unitaire de même sens et direction que $\overrightarrow{v}$ (sans unité)

4.4 Forces de trainée et de portance sur une aile d'avion

Sur certains objets, la force de trainée s'accompagne d'une force de portance.

Force de portance

$$\overrightarrow{F}_z = -\frac{1}{2}\mu v^2 S C_z \overrightarrow{u}$$

Avec

- $\overrightarrow{F}_z$ la force de portance (en N)
- μ la masse volumique (en $\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$)
- v la vitesse (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- S le maitre-couple (en $\mathrm{m^2}$)
- C_z le coefficient de portance (sans unité)
- $\overrightarrow{u_z}$ un vecteur unitaire orthogonal au vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ (sans unité)

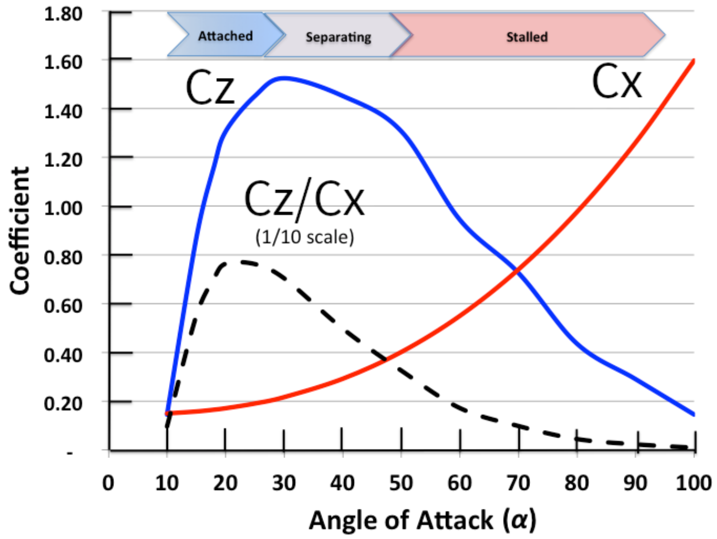
Exemple

Aile d'avion, voile de bateau.

La force de trainée est colinéaire à la vitesse de l'objet. La force de portance est orthogonale à la vitesse de l'objet.

Schéma Traînée, portance et angle d'incidence

La trainée et la portance dépendent de l'angle d'incidence. Les courbes ci-dessous présentent un exemple de dépendance pour une aile d'avion.



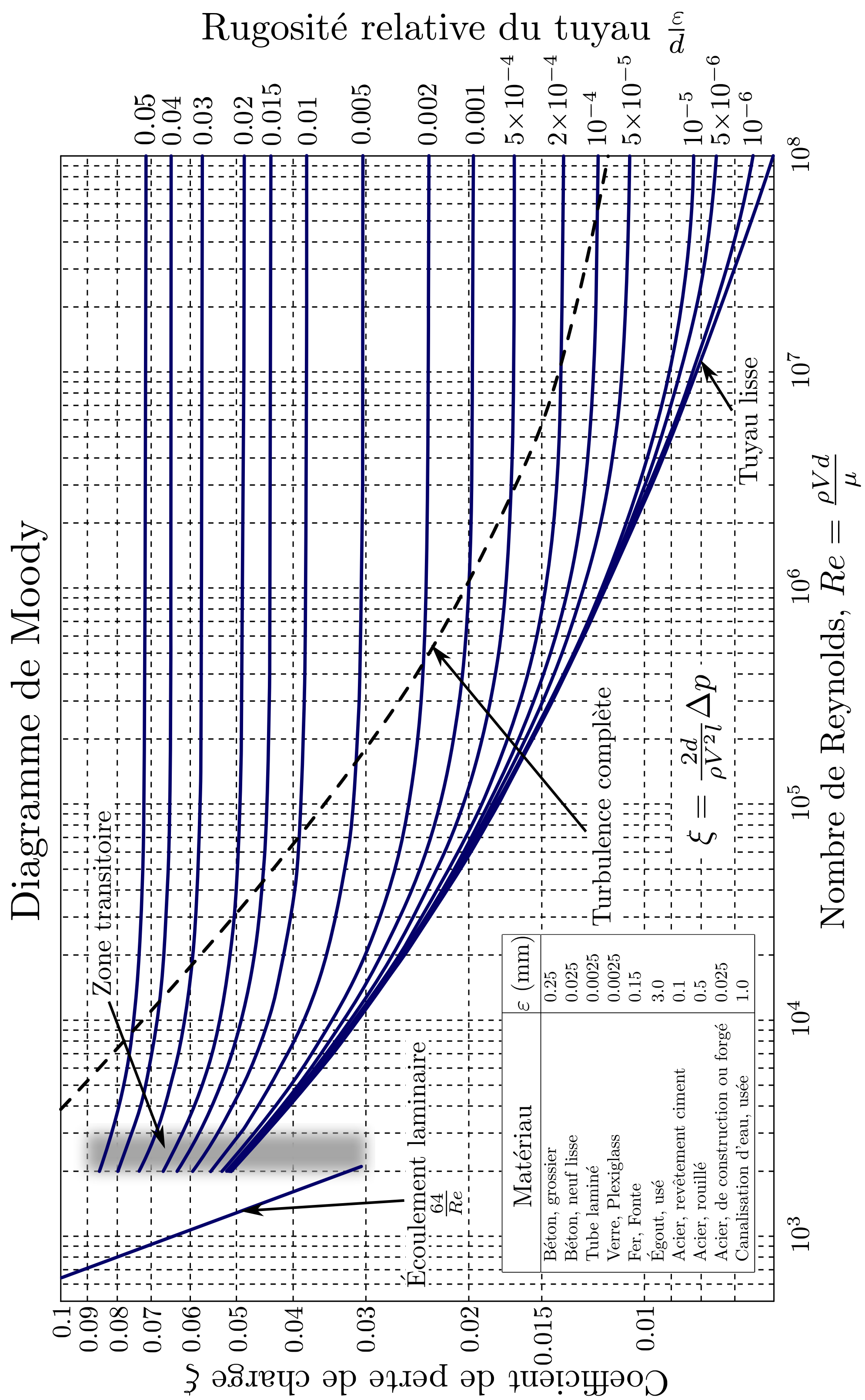
4.5 Couche limite

Dans un écoulement à haut nombre de Reynolds, où le transport de quantité de mouvement se fait essentiellement par convection, la viscosité du fluide a une influence sur la force subie par un objet. Pour expliquer cet apparent paradoxe, on introduit la couche limite.

Dans un écoulement à haut nombre de Reynolds, il existe des zones où le transport de quantité de mouvement se fait essentiellement par diffusion. Ces zones sont appelées couches limites. Ces zones sont de faible épaisseur et situées à proximité immédiate des objets.

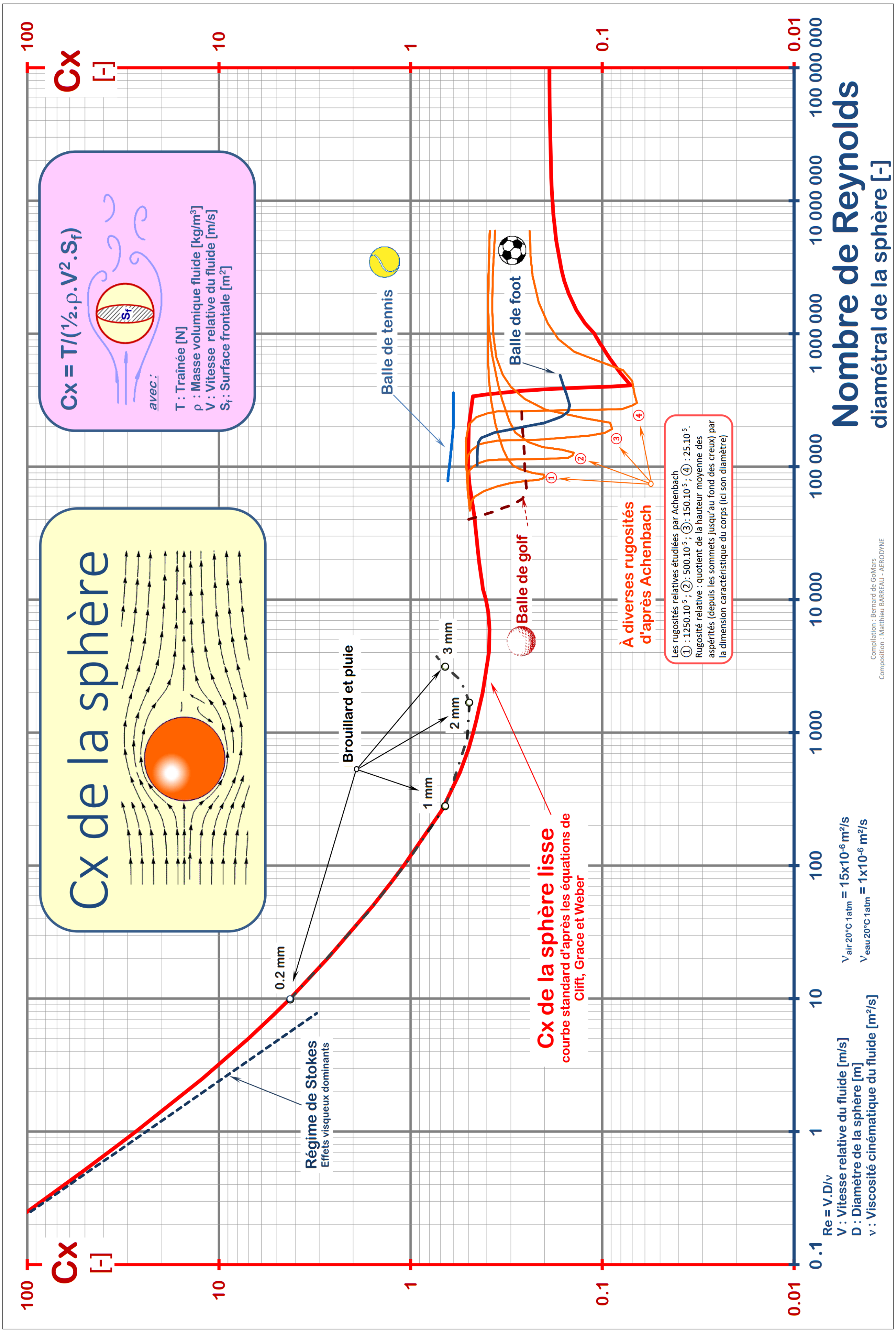
Schéma Couche limite

A Diagramme de Moody



Matériau	ε (mm)
Béton, grossier	0.25
Béton, neuf lisse	0.025
Tube laminé	0.0025
Verre, Plexiglass	0.0025
Fer, Fonte	0.15
Égout, usé	3.0
Acier, revêtement ciment	0.1
Acier, rouillé	0.5
Acier, de construction ou forgé	0.025
Canalisation d'eau, usée	1.0

B Coefficient de trainée d'une sphère



Méthodes

1 Appliquer le théorème de la résultante cinétique à une particule de fluide

1. Faire le bilan des forces
   (a) Forces de pression (résultante $-\overrightarrow{\text{grad}} P dV$)
   (b) Forces de viscosité (il y en a généralement 2, sur deux faces opposées de la particule de fluide)
   (c) D'autres forces éventuelles (poids, ...)
2. Écrire le TRC à la particule de fluide (attention, l'accélération comporte 2 termes : le terme local et le terme convectif)

2 Lire un diagramme de Moody

1. (seulement si $R_e > 2000$) Déterminer sur quelles courbes on va se placer grâce à la rugosité.
2. Passer des grandeurs de l'énoncé aux grandeurs adimensionnées.
3. Lire sur la courbe.
4. Passée des grandeurs adimensionnées lues sur la courbes aux grandeurs demandées.

TD

1 Troposphère

La troposphère est la partie inférieure de l'atmosphère, située sous 11 km d'altitude. La température y varie de 288 K à 217 K. On note (Oz) l'axe vertical ascendant, dont l'origine est au niveau de la mer.

Atmosphère isotherme On suppose dans un premier temps que la température est uniforme dans la troposphère

1. Déterminer l'expression de la pression P en fonction de l'altitude z, en fonction de la température T, de la masse molaire de l'air M_{air}, de la constante des gaz parfaits R et de l'accélération de la pesanteur g. On note P_0 la pression au niveau de la mer.

2. Montrer que 70% de la masse totale de l'air se situe en dessous de 10 km dans ce modèle.

Atmosphère adiabatique On renonce à l'hypothèse isotherme pour passer à une atmosphère adiabatique.

3. Les capacités thermiques molaires de l'air sont $C_V = \frac{5}{2}R$ et $C_P = \frac{7}{2}R$. Exprimer la valeur du coefficient γ.

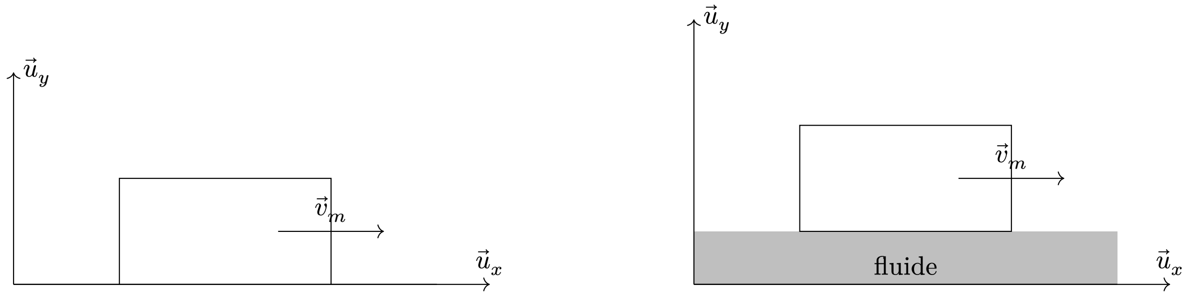
4. Montrer que le produit $T^x P^y$ est constant pour une transformation réversible et adiabatique d'un gaz parfait. Exprimer x et y en fonction de γ.

5. En déduire la relation reliant $\frac{dP}{P}$ et $\frac{dT}{T}$.

6. Établir l'expression du gradient de température adiabatique $\frac{dT}{dz}$ en fonction de γ, M, g et R.

2 Lubrification

Le but de cet exercice est de comprendre l'intérêt de la lubrification. On considère un mobile parallélépipédique de masse $M = 30$ kg en translation sur un support horizontal.



(a) Mobile en frottement solide avec son support.

(b) Mobile sur une couche de fluide.

FIG. 1

Sans lubrification Le contact entre le pavé et la surface est de type frottement solide. Il obéit à la loi de Coulomb : $R_T = fR_N$ avec un coefficient $f = 0{,}20$. En $x = 0$, $v = v_0 = 10$ km/h.

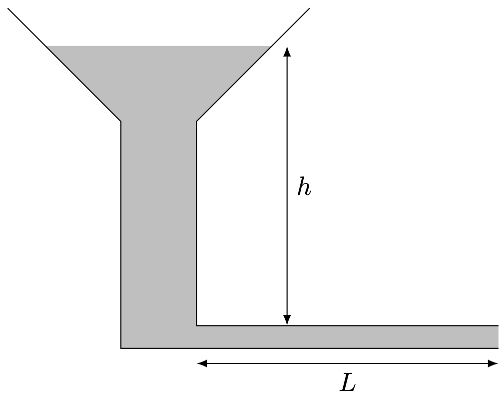
1. Donner la valeur numérique de la réaction tangentielle.

2. Donner la distance d'arrêt du mobile et faire l'application numérique.

Avec lubrification On introduit maintenant une couche d'eau d'épaisseur $e = 1{,}0\,\text{mm}$ entre la mobile et la surface. On suppose que le régime est permanent (un opérateur maintient la vitesse du palet constante) et que la vitesse du fluide s'écrit $\vec{v} = v(x,y)\vec{u}_x$. On néglige les effets de bords. La surface du mobile en contact avec l'eau est $S = 400\,\text{cm}^2$. Le mobile a une vitesse $v_m = v_0 = 10\,\text{km/h}$.

3. Donner la valeur de la viscosité de l'eau.
4. Montrer que $v(x,y)$ est indépendant de x.
5. On admet que la vitesse s'écrit $v(y) = ay + b$. Déterminer a et b en exploitant la description du problème.
6. Donner l'expression de la force surfacique de cisaillement au sein de l'eau.
7. Exprimer la force de frottement à laquelle est soumis la pavé.
8. On admet qu'en l'absence d'action de l'opérateur pour maintenir la vitesse constante, l'expression de la vitesse établie précédemment reste valable, mais avec a fonction du temps. Que devient la distance d'arrêt du palet ?

3 Distribution d'eau potable



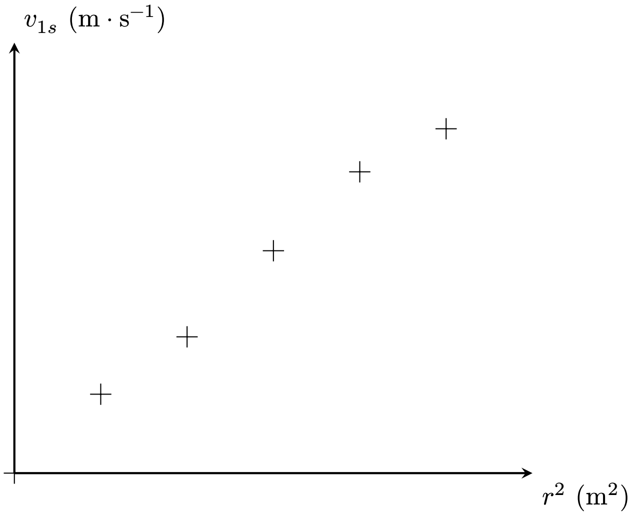
Un château d'eau de hauteur $h = 25\,\text{m}$, alimente un village en eau potable. On rappelle que l'eau a une masse volumique $\mu_0 = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et une viscosité dynamique $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{Pl}$.

1. Quel est l'ordre de grandeur de la pression P_e qui peut être attendue au pied du château d'eau, en admettant que le débit de l'eau dans la canalisation soit suffisamment faible pour ne pas perturber la pression ?
2. Soit une conduite de longueur $L = 100\,\text{m}$ et de section $S = 1\,\text{cm}^2$ partant du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité est à l'air libre. Quel débit peut-on attendre, en supposant *a priori* l'écoulement laminaire ? Calculer la vitesse débitante U.
3. Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement, et conclure.
4. En tenant compte du diagramme de Moody, dire si la vitesse débitante sera plus ou moins importante que celle calculée plus haut.

4 Chute d'une bille dans un fluide

Fluide très visqueux L'axe (Oz) est vertical ascendant. Soit une bille d'acier sphérique de masse m, de masse volumique ρ, de vitesse $\vec{v} = -v\vec{u_z}$. On la lâche sans vitesse initiale dans une éprouvette remplie de glycérine (masse volumique ρ_0, viscosité η). Le champ de pesanteur $\vec{g}$ est uniforme. On pose $g' = (1 - \frac{\rho_0}{\rho})$. L'éprouvette est de diamètre très supérieur à celui de la bille. La force de frottements visqueux exercée par le fluide sur la bille est $\vec{F} = -6\pi\eta r\vec{v}$.

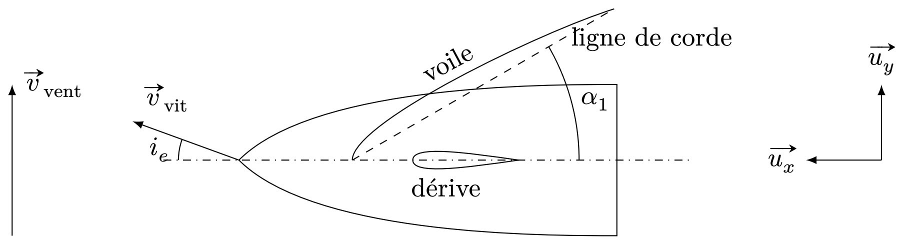
1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par v et la résoudre.
2. On mesure la vitesse v_{1s} une seconde après avoir lâché la bille, sachant que le temps caractéristique du mouvement est $\tau = 6\,\text{ms}$. On fait cela pour plusieurs billes, de rayons plus petits. La courbe ci jointe montre l'évolution de v_{1s}, en fonction du carré r^2 du rayon de la sphère. Justifier le positionnement des points expérimentaux. Comment en déduire η ?
3. Le nombre de Reynolds vaut $Re = 0,1$ pour la plus grosse des sphères. Justifier le modèle.



Fluide peu visqueux On lâche sans vitesse initiale une bille sphérique, de masse m, dans un liquide visqueux, de masse volumique μ. On admet que la force de trainée a pour norme $F_{tr} = \frac{1}{2}\mu v^2 S C_x$. On suppose la pesanteur uniforme, et on note v la norme de la vitesse de la bille.

2. Que représentent S ? Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$?
3. Montrer l'existence d'une vitesse limite v_l et donner son expression.
4. Résoudre l'équation différentielle.
5. Critiquer le modèle utilisé. Comment faudrait-il le modifier pour un fluide très visqueux ?

5 Dériveur



On considère un dériveur, c'est-à-dire un petit bateau à voile équipé d'une dérive. Comme tous les navires, il est amené à se déplacer en restant sans cesse à l'interface entre deux fluides, l'air et l'eau. Compte tenu des vitesses mises en jeu dans un tel contexte, l'air et l'eau peuvent tous deux être considérés en écoulement homogène et incompressibles.

On prendra pour l'air $\mu_a = 1{,}2\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\eta_a = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pl}$; les valeurs relatives à l'eau sont à connaître : $\mu_e = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\eta_e = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pl}$.

L'eau est considérée immobile dans le référentiel terrestre. En revanche, le vent souffle avec une vitesse de norme $v_{\text{vent}} = 50\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Étant à l'interface entre deux fluides, le dériveur utilise deux sortes d'ailes pour s'y déplacer : à voile, pour laquelle le mat mesure $L_{env,a} = 5{,}0\,\mathrm{m}$, et la bôme (donc la corde) $L_a = 2{,}5\,\mathrm{m}$; et la dérive, de longueur de corde $L_{env,e}$. On suppose dans cet exercice que les cordes sont de longueur constante tout le long des envergures.

1. Si le dériveur se déplaçait par rapport à l'eau à une vitesse de norme $v_e = 20\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$, dans une direction orthogonale à celle du vent, quelles seraient les valeurs des nombres de Reynolds associés aux deux écoulements : air et eau ? Commenter.
2. La figure ci-dessus montre un schéma très simplifié du dériveur en vue de dessus. A la différence d'un char à voile, dont les roues adhèrent bien au sol, un dériveur ne peut pas se déplacer dans la direction de son axe (Ox). En plus de son mouvement d'avancement selon son axe, il subit un mouvement dit « de dérive ». La direction de sa vitesse $\overrightarrow{v_{vit}}$ par rapport à l'eau est indiquée sur la figure. En utilisant la portance et la traînée des deux ailes que constituent la voile et la dérive, effectuer un schéma des différentes forces horizontales agissant sur le dériveur. Y a t-il d'autres forces à ajouter ?
3. En déduire un ordre de grandeur de l'envergure $L_{env,e}$ à choisir pour la dérive.