Physique des ondes 2
Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Identifier le caractère linéaire d'une équation aux dérivées partielles.
- ❑ Établir la relation de dispersion.
- ❑ Relier, pour un signal proportionnel à $exp(j(\omega t - \underline{k}x))$, la partie réelle de $\underline{k}$ à la vitesse de phase et la partie imaginaire de $\underline{k}$ à une dépendance spatiale de l'amplitude.
- ❑ Déterminer la vitesse de groupe.
- ❑ Associer la vitesse de groupe à la propagation de l'enveloppe du paquet d'ondes.
- ❑ 💻À l'aide d'un langage de programmation, simuler la propagation d'un paquet d'ondes dans un milieu dispersif et visualiser le phénomène d'étalement.
- ❑ Énoncer et exploiter la relation entre les ordres de grandeur de la durée temporelle d'un paquet d'onde et la largeur fréquentielle de son spectre.
- ❑ Pour une onde dans un conducteur ohmique :
  - Identifier une analogie formelle avec les phénomènes de diffusion.
  - Établir l'expression de l'épaisseur de peau.
  - Citer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de peau du cuivre à 50 Hz.
  - Associer l'atténuation de l'onde à une dissipation d'énergie.
  - Justifier que les champs électrique et magnétique sont nuls dans un conducteur parfait.
- ❑ Pour une onde dans un plasma dilué :
  - Exprimer la conductivité complexe du milieu et établir la relation de dispersion.
  - Relier la fréquence de coupure aux caractéristiques du plasma et citer son ordre de grandeur dans le cas de l'ionosphère.
  - Associer le caractère imaginaire pur de la conductivité complexe à l'absence de puissance moyenne échangée entre le champ et les porteurs.
  - Distinguer qualitativement les ondes évanescentes et les ondes progressives du point de vue du transport de l'énergie.

Résumé du cours

1 Ondes progressives en milieu linéaire

1.1 Milieu linéaire

Pour une équation aux dérivées partielle linéaire, si y_1 et y_2 sont solutions, alors $\lambda y_1 + \mu y_2$ est également solution.

Exemple

Équation de d'Alembert, équation de diffusion.

Un milieu linéaire est un milieu dans lequel les équations aux dérivées partielle décrivant l'évolution des grandeurs sont linéaires.

Exemple

L'air est un milieu linéaire pour les ondes sonores dans l'approximation acoustique. Les milieux homogènes sont des milieux linéaires pour les ondes thermiques.

1.2 Onde progressive harmonique

La définition d'une OPH peut être élargie pour être solution de n'importe quelle équation aux dérivées partielles linéaire.

Onde progressive harmonique

$$\underline{y}(M,t) = \underline{y_0} e^{j\left(\omega t - \underline{\vec{k}}.\overrightarrow{OM}\right)}$$

Avec

- $\underline{y_0} = y_0 e^{j\phi}$ l'amplitude complexe
- y_0 l'amplitude
- ϕ la phase à l'origine (en rad)
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- T la période (en s)
- $\underline{\vec{k}} = \underline{k}\vec{u}$ le vecteur d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- $\vec{u}$ le vecteur unitaire de même direction et sens que la propagation de l'onde (sans unité)

Application [1]

Déterminer l'expression réelle d'une OPH. On notera $\underline{k} = k_r + jk_i$.

La partie réelle de $\underline{k}$ est en lien avec la propagation de la phase.

Vitesse de phase

Hypothèses L'onde est une OPH.

$$v_\phi = \frac{\omega}{\Re(\underline{k})}$$

Avec

- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- $\underline{k}$ le nombre d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

La vitesse de phase représente la vitesse à laquelle la phase se propage.
Un milieu **dispersif** est un milieu dans lequel la vitesse de phase dépend de la pulsation.
La partie imaginaire de $\underline{k}$ est liée avec la variation de l'amplitude au cours de la propagation de l'onde.

Profondeur de peau

Hypothèses L'onde est une OPH.

$$\delta = \frac{1}{|\Im(\underline{k})|}$$

Avec

- δ la profondeur de peau (en m)
- $\underline{k}$ le nombre d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

Quand l'onde a parcouru quelques fois la profondeur de peau, son amplitude devient négligeable.

1.3 Vitesse de groupe

Dans un milieu dispersif, toutes les pulsations ne se propagent pas à la même vitesse. Il en résulte un étalement des paquets d'onde.

Application 2

On considère un paquet d'onde simplifié constitué de deux OPH de fréquences proches : $y(x,t) = \cos(\omega t - kx) + \cos\left((\omega + d\omega)t - (k + dk)x\right)$. En l'écrivant comme un produit de consinus, montrer que son enveloppe se propage à la vitesse $\frac{d\omega}{dk}$ et que se phase se propage à la vitesse $\frac{\omega}{k}$.

Vitesse de groupe

Hypothèses L'onde est une OPH.

$$v_g = \frac{d\omega}{d\Re(k)}$$

Avec

- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- $\underline{k}$ le nombre d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

La vitesse de groupe est la vitesse à laquelle l'envelope d'un paquet d'onde se propage.

1.4 Paquet d'onde

Une OPH a une extension temporelle et spatiale infinie, ce qui ne correspond pas aux ondes réelles.
Un paquet d'onde est une superposions d'OPH de pulsations proches et d'extension spatiale et temporelle finie.

Schéma Représentations temporelle et fréquentielle d'un paquet d'onde

La largeur spectrale du paquet d'onde est reliée avec son étendue temporelle.

Largeur spectrale

$$\Delta f \sim \frac{1}{\Delta t}$$

Avec

- Δf la largeur spectrale (en Hz)
- Δt l'étendue temporelle (en s)

Application 3

Un laser femtoseconde produit des impulsions de très courte durée (de l'ordre de la centaine de femtosecondes). Calculer l'ordre de grandeur de la largeur spectrale d'un laser femtoseconde rouge et comparer à la fréquence moyenne.

2 Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

2.1 Dans un conducteur ohmique

Un conducteur ohmique est un milieu où la loi d'ohm locale est vérifiée.

Exemple

Solution électrolytique, métal.

2.1.1 Retour sur le modèle de Drude

La loi d'ohm locale a été démontrée en supposant le champ électrique uniforme et stationnaire, et en l'absence de champ magnétique.

Application 4

Comparer en ordre de grandeur les termes électrique et magnétique de la force de Lorentz.

Application 5

On peut supposer le champ uniforme à condition qu'il varie peu à l'échèle du libre parcours moyen des porteurs de charge (10^{-8} m). Calculer jusqu'à quelle fréquence cette hypothèse est valide dans le cuivre.

La loi d'ohm locale reste valable à condition que la période de l'onde soit très petite devant le temps moyen entre deux chocs.

2.1.2 Équation de propagation

Neutralité locale du métal [6]

Hypothèses

- La fréquence $f < 10^{14}$ Hz.
- La conductivité est du même ordre de grandeur que celle du cuivre.

$$\rho \approx 0$$

Avec ρ la densité volumique de charge (en $\mathrm{C \cdot m^{-3}}$)

Équation de propagation de l'onde [7]

Hypothèses

- La fréquence $f < 10^{14}$ Hz.
- La conductivité est du même ordre de grandeur que celle du cuivre.

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - D\vec{\Delta}\vec{E} = 0$$

Avec

- $\vec{E}$ le champ électrique (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- $D = \frac{1}{\mu_0 \gamma}$ le coefficient de diffusion (en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- γ la conductivité électrique du milieu (en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$)

Dans un conducteur ohmique, le champ électrique obéit à une équation de diffusion, tout comme la température (cf chapitre transfert thermique par conduction).

2.1.3 Relation de dispersion

Relation de dispersion [8]

Hypothèses

- Pour une OPPH.
- Pour une équation de diffusion.

$$\underline{k}^2 = -j\mu_0\gamma\omega$$

Avec

- $\underline{k}$ le nombre d'onde (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- γ la conductivité électrique du milieu (en $\mathrm{S \cdot m^{-1}}$)
- ω la pulsation (en $\mathrm{rand \cdot s^{-1}}$)

Application [9]

On considère une OPPH se propageant dans le sens de x croissants. Déterminer la vitesse de phase. Le milieu est-il dispersif ? Déterminer la profondeur de peau.

Application [10]

Calculer l'épaisseur de peau pour du cuivre à 50 Hz.

Application [11]

Calculer la profondeur de peau pour une onde thermique dans un sol de diffusivité thermique $0{,}2 \times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$ en considérant les variations journalières de température.

2.1.4 Aspect énergétique

Application [12]

On considère une OPPH électromagnétique dans un conducteur ohmique $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)}\vec{e_y}$. Déterminer le champ magnétique puis le vecteur de Poynting.

L'onde a de moins en moins d'énergie au fur et à mesure de sa propagation. Le conducteur ohmique a absorbé de l'énergie qui a été convertie en chaleur par effet Joule.

2.1.5 Cas du conducteur parfait

Un métal parfait est un métal de conductivité électrique infinie.

Dans un métal parfait, la profondeur de peau est nulle. Dans un métal parfait, les champs électrique et magnétique sont nuls.

2.2 Dans un plasma

2.2.1 Le plasma

Un **plasma** est un état de la matière. Dans un plasma, des atomes ou des molécules ont été ionisés. Dans un plasma, il y a des électrons, des cations et éventuellement des espèces neutres. Un plasma est globalement neutre.

Exemple

Les éclairs, le soleil et les flammes de haute température sont des plasmas.

Exemple

L'ionosphère est une couche de la haute atmosphère ionisée par le rayonnement solaire.

Dans un plasma **dilué**, la concentration est faible. Dans un plasma dilué, les particules n'interagissent pas entre elles.

2.2.2 Conductivité d'un plasma

Les ions ont une masse bien supérieure à celle des électrons, le déplacement des ions peut donc être négligé.

Conductivité d'un plsama [13]

Hypothèses

- Pour une OPPH polarisée rectilignement.
- Le plasma est dilué.
- Les ions sont immobiles.

$$\underline{\gamma} = -j\frac{ne^2}{\omega m_e}$$

Avec

- $\underline{\gamma}$ la conductivité complexe (en $\mathrm{S} \cdot \mathrm{m}^{-1}$)
- n la densité volumique d'électrons (en m^{-1})
- ω la pulsation (en $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$)
- m_e la masse d'un électron (en kg)
- e la charge élémentaire (en C)

La conductivité est imaginaire, ce qui traduit un déphasage entre le champ électrique et le vecteur densité volumique de courant.

Application ✎14

On considère une OPPH $\vec{\underline{E}} = E_0 e^{j(\omega t - \underline{k}x)} \vec{e_y}$. Déterminer le vecteur densité volumique de courant électrique puis la densité volumique de puissance cédée par l'onde aux porteurs de charge et enfin sa valeur moyenne.

Un plasma ne reçoit en moyenne pas de puissance du champ électromagnétique.

2.2.3 Relation de dispersion

Relation de dispersion ✎15

Hypothèses

- Pour une OPPH polarisée rectilignement.
- Le plasma est dilué.
- Les ions sont immobiles.

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

Avec

- $\underline{k}$ le nombre d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)
- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- c la célérité de la lumière dans le vide (en $\mathrm{m \cdot s^{-1}}$)
- $\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$ la pulsation plasma (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- n la densité volumique d'électrons (en $\mathrm{m^{-1}}$)
- m_e la masse d'un électron (en kg)
- e la charge élémentaire (en C)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)

Les solutions de la relation de dispersion dépendent du signe de $\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$.

Application ✎16

Calculer la pulsation plasma pour l'ionosphère ($n \approx 10^5\,\mathrm{cm^{-3}}$).

La fréquence de coupure correspondant à la pulsation plasma est de l'ordre de 10 MHz pour l'ionosphère.

2.2.4 Pulsation supérieure à la pusation plasma.

Dans ce cas, la relation de dispersion a deux solutions réelles : $\underline{k} = \pm \frac{\omega}{c}\sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)}$.

Le nombre d'onde est réel, ce qui traduit une propagation de l'onde sans atténuation dans l'ionosphère.

L'onde est une onde progressive qui transporte donc de l'énergie.

Application ✎17

Déterminer les vitesses de phase v_ϕ et de groupe v_g pour une OPPH dans l'ionosphère vérifiant $\omega > \omega_p$. Tracer v_ϕ et v_g en fonction de ω. L'ionosphère est-elle un milieu dispersif.

2.2.5 Pulsation inférieure à la pusation plasma.

Dans ce cas, la relation de dispersion a deux solutions imaginaires pures : $\underline{k} = \pm j\frac{\omega}{c}\sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$.

L'onde obtenue est une onde évanescente. Une onde évanescente est une onde stationnaire qui décroit exponentiellement avec la position.

Onde évanescente

$$y(x,t) = y_0 \cos(\omega t) e^{k'' x}$$

Avec

- ω la pulsation (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- $k'' = \Im(\underline{k})$ la partie imaginaire du nombre d'onde complexe (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

Application 18

Déterminer le vecteur de Poynting pour une onde évanescente $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) e^{k'' x} \vec{e_y}$ puis sa valeur moyenne.

Une onde évanescente ne transporte par d'énergie en moyenne.
Lorsque $\omega < \omega_p$ les ondes ne traversent pas l'ionosphère, elles sont réfléchies.

TD

1 Ondes sonores dans un fluide visqueux

On étudie une onde sonore dans un fluide. L'onde est plane, progressive et se déplace dans le sens des x croissants. AU repos, la masse volumique du fluide est ρ_0 et la pression P_0. Le coefficient de compressibilité adiabatique est χ_S. L'effet de la pesanteur est négligé. On se place dans le cadre de l'approximation acoustique.

On tient compte de la viscosité du fluide. La densité volumique de forces de viscosité est $\eta\Delta\overrightarrow{v_1} + \frac{\eta}{3}\overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{v_1})$, où v_1 est le champ des vitesses dans le fluide, dû à l'onde sonore. On note P_1 le champ de surpression.

1. Montrer que le PFD appliqué à une particule de fluide, dans l'approximation acoustique, en projection sur l'axe (Ox) donne
$$\rho_0\frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{4}{3}\eta\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}$$
2. Établir l'équation de propagation de l'onde sonore pour la surpression (on n'utilisera que les équations projetées sur $\overrightarrow{u_x}$). On utilisera la célérité, telle que $c^2 = \frac{1}{\chi_0\rho_0}$, afin de ne pas employer le coefficient de compressibilité isentropique.
3. L'onde est harmonique de fréquence $f = 1{,}0 \times 10^3$ Hz. Pour l'air à 20 °C, on donne $\eta/\rho_0 = 2{,}0 \times 10^{-5}\,\text{m}^2\text{s}^{-1}$. Établir l'équation de dispersion et la distance caractéristique d'atténuation de l'onde, en tenant compte des approximations numériques.
4. Est-ce la raison pour laquelle on entend moins bien un son quand on s'éloigne de sa source ?

2 Corde vibrante soumise à des frottements visqueux

On étudie une corde vibrante, de longueur L, de masse linéique μ, attachée à ses deux extrémités. Elle est confondue avec l'axe (Ox) au repos. Elle est tendue sous une tension T et est soumise à une force dissipative de frottement fluide : un élément de longueur dx de corde, dont le déplacement $y(x,t)$ est transversal suivant $\overrightarrow{u_y}$ est soumis à la force $-\alpha\frac{\partial y}{\partial t}dx\overrightarrow{u_y}$.

1. Mettre en équation la corde. On introduira les coefficients $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ et $a = \frac{\alpha}{T}$.
2. On cherche une solution à variables séparées en $y(x,t) = f(x)g(t)$. À quelles équations différentielles les deux fonctions f et g obéissent-elles ?
3. Résoudre l'équation sur f puis celle sur g. On se placera dans le cas de frottements faibles, et on précisera explicitement l'inégalité qu'implique cette hypothèse.
4. En déduire la durée caractéristique d'amortissement des oscillations. Que devient l'énergie initialement contenue dans la vibration de la corde ?

3 Câble coaxial et pertes résistives

Les pertes dans un câble coaxial sont prises en compte en ajoutant deux éléments résistifs. Le premier, de résistance rdx est relié en série avec la bobine et le second, de conductance gdx (inverse de la résistance), est en parallèle avec le condensateur.

1. Établir une relation entre Γ, g, $u(x,t)$, $i(x,t)$ et/ou de leurs dérivées premières.
2. Établir une relation entre Λ, r, $u(x,t)$, $i(x,t)$ et/ou de leurs dérivées premières.
3. En déduire que $u(x,t)$ satisfait à l'équation dite des télégraphistes :
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta\frac{\partial y}{\partial t} - \mu u(x,t) = 0$$
Préciser l'expression de α, β, et μ en fonction des paramètres de l'énoncé. Remarque : i obéit à la même équation.

4. On considère une onde qui se déplace dans le sens de x croissants : $\underline{u}^+(x,t) = \underline{u}_0^+ e^{j(\omega t - kx)}$. Établir l'équation de dispersion.

5. On pose $\underline{k} = k' + jk''$. Qu'implique le fait que $\underline{k}$ soit complexe ?

6. Déterminer la vitesse de phase v_ϕ et une longueur δ caractéristique en fonction de k' et k''. Quels doivent être les signes de k' et k'' ?

4 Spread of an electromagnetic wave in a plasma

A neutral plasma is composed of free electrons and cations, much heavier than the electrons (they will then be considered still). The electrons, of mass m and of charge $-e$ are in number n_0 by unit of volume. The problem is studied in the Cartesian coordinate system.

We study the propagation of a wave which electric field is $\underline{\vec{E}} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{u}_z$

1. Ascertain the magnetic field of this wave.

2. Determine 2 equations on the current density vector $\underline{\vec{j}}$. Deduce the dispersion equation and comment the result.

3. Ascertain the Poynting vector. Comment.

5 Simulation de la propagation d'un paquet d'onde dans un plasma