Physique des ondes 3
Interfaces entre deux milieux

Compétences

A la fin de ce chapitre, je saurai :

- ❑ Expliciter des conditions aux limites à une interface pour une onde sonore.
- ❑ Établir les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude de surpression, en amplitude de vitesse ou en puissance dans le cas d'une onde plane progressive sous incidence normale.
- ❑ Relier l'adaptation des impédances au transfert maximal de puissance.
- ❑ Interpréter le vecteur densité de courant surfacique comme un modèle pour décrire un déplacement de charges à travers un domaine d'épaisseur faible devant l'échelle de description.
- ❑ Utiliser les relations de passage des champs magnétique et électrique fournies.
- ❑ Exploiter la continuité de la composante tangentielle du champ électrique pour justifier l'existence d'une onde réfléchie et calculer celle-ci.
- ❑ Établir l'expression du champ électromagnétique de l'onde réfléchie et du vecteur densité de courant surfacique.
- ❑ Calculer le coefficient de réflexion en puissance.
- ❑ Déterminer la pression de radiation à l'aide de l'expression fournie de la force de Laplace.

Résumé du cours

1 Cas des ondes sonores

Lorsque deux fluides non miscibles sont en contact, des ondes sonores peuvent passer d'un à l'autre.

1.1 Conditions aux limites

La condition d'adhérence impose une continuité de la vitesse à l'interface.

continuité de la pression [1]

La surpression est continue à l'interface

1.2 Réflexion et transmission sur une interface plane.

Lorsqu'une onde sonore arrive perpendiculairement à une interface plane, les coefficients de réflexion et de transmission peuvent s'exprimer simplement grâce aux impédances acoustiques des deux milieux.

Coefficients de réflexion et de transmission sur les amplitudes des surpressions et des survitesses [2]

Hypothèses

- Une OPPH $\underline{P_i} = P_{i,0} e^{j(\omega t - k_1 x)}$ arrive en incidence normale.
- L'OPPH réfléchie s'écrit $\underline{P_r} = \underline{P_{r,0}} e^{j(\omega t + k_1 x)}$
- L'OPPH transmise s'écrit $\underline{P_t} = \underline{P_{t,0}} e^{j(\omega t - k_2 x)}$
- La surface séparant les milieux est plane.
- Les fluides ne sont pas miscibles.

$$r_v = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$r_P = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_v = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$t_P = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Avec

- $r_v = \frac{v_{r,0}}{v_{i,0}}$ le coefficient de réflexion sur l'amplitude de la vitesse (sans unité)
- $r_P = \frac{P_{r,0}}{P_{i,0}}$ le coefficient de réflexion sur l'amplitude de la pression (sans unité)
- $t_v = \frac{v_{t,0}}{v_{i,0}}$ le coefficient de transmission sur l'amplitude de la vitesse (sans unité)
- $t_P = \frac{P_{t,0}}{P_{i,0}}$ le coefficient de transmission sur l'amplitude de la pression (sans unité)
- Z_1 l'impédance acoustique du milieu de gauche (en $\mathrm{P \cdot s \cdot m^{-1}}$)
- Z_2 l'impédance acoustique du milieu de droite (en $\mathrm{P \cdot s \cdot m^{-1}}$)

Schéma

Coefficients de réflexion et de transmission sur les puissances [3]

Hypothèses

- Une OPPH $\underline{P_i} = P_{i,0} e^{j(\omega t - k_1 x)}$ arrive en incidence normale.
- L'OPPH réfléchie s'écrit $\underline{P_r} = \underline{P_{r,0}} e^{j(\omega t + k_1 x)}$
- L'OPPH transmise s'écrit $\underline{P_t} = \underline{P_{t,0}} e^{j(\omega t - k_2 x)}$
- La surface séparant les milieux est plane.
- Les fluides ne sont pas miscibles.

$$R = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2$$

$$T = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

Avec

- $R = \frac{I_r}{I_i}$ le coefficient de réflexion sur la puissance (sans unité)
- $T = \frac{I_t}{I_i}$ le coefficient de transmission sur la puissance (sans unité)
- I_i, I_r, I_t les intensité acoustiques incidente, réfléchie et transmise (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)
- Z_1 l'impédance acoustique du milieu de gauche (en $\mathrm{P \cdot s \cdot m^{-1}}$)
- Z_2 l'impédance acoustique du milieu de droite (en $\mathrm{P \cdot s \cdot m^{-1}}$)

Lorsque $Z_1 = Z_2$, la puissance transmise est maximale, on dit qu'il y a **adaptation d'impédance**.

APPLICATION ✎[4]

Calculer le coefficitent de transmission en puissance pour l'interface air-eau. $Z_{\text{air}} = 4 \times 10^2\,\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$ $Z_{\text{eau}} = 1 \times 10^6\,\text{Pa}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-1}$.

APPLICATION ✎[5]

Montrer que l'énergie est conservée lors de la réflexion et transmission à l'interface.

2 Cas des ondes électromagnétiques

2.1 Courant surfacique

Dans un conducteur ohmique, le champ électrique des ondes électromagnétiques engendre un courant électrique d'après la loi d'Ohm locale. Dans un conducteur ohmique, les ondes électromagnétiques restent en surface et ne pénètrent que de quelques fois la profondeur de peau. Les courants électriques sont donc localisés en surface du conducteur. Lorsque les courants sont répartis à la surface, il est possible de les modéliser par des courants surfacique.

Vecteur densité surfacique de courant

$$I = \int_{\mathcal{C}} \overrightarrow{j_S}.\overrightarrow{dS}$$

Avec

- I le courant électrique (en A)
- $\overrightarrow{j_S}$ le vecteur densité surfacique de courant (en $\text{A}\cdot\text{m}^{-1}$)

2.2 Relations de passage

Les composantes des champs magnétique et électrique vérifient des relation de passage aux interfaces entre deux milieux.

Relations de passage sur le champ électrique

$$\overrightarrow{E_2} - \overrightarrow{E_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}\overrightarrow{n}_{1\to2}$$

Avec

- $\overrightarrow{E_2}$ le champ électrique dans le milieu 2 (en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)
- $\overrightarrow{E_1}$ le champ électrique dans le milieu 1 (en $\text{V}\cdot\text{m}^{-1}$)
- σ la charge surfacique de l'interface (en $\text{C}\cdot\text{m}^{-2}$)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$)
- $\overrightarrow{n}_{1\to2}$ un vecteur unitaire allant du milieu 1 vers le milieu 2

Les composantes du champ électrique tangentes à l'interface sont continues.

Relations de passage sur le champ magnétique

$$\overrightarrow{B_2} - \overrightarrow{B_1} = \mu_0 \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{n}_{1\to 2}$$

Avec

- $\overrightarrow{B_2}$ le champ magnétique dans le milieu 2 (en T)
- $\overrightarrow{B_1}$ le champ magnétique dans le milieu 1 (en T)
- $\overrightarrow{j_S}$ le vecteur densité surfacique de courant à l'interface (en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- $\overrightarrow{n}_{1\to 2}$ un vecteur unitaire allant du milieu 1 vers le milieu 2

La composante du champ magnétique normale à l'interface est continue.

2.3 Réflexion sur un métal parfait

Lorsqu'une onde électromagnétique arrive sur un métal parfait, elle se réfléchit.

Onde réfléchie [6]

Hypothèses

- L'onde incidente s'écrit $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_y}$.
- L'onde arrive en incidence normale et l'interface est en $x = 0$.
- Le métal est parfait.
- L'onde réfléchie est une OPPH $\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_{0,r}} e^{j(\omega t + kx)} \overrightarrow{e_y}$.

$$\underline{\overrightarrow{E_r}} = -E_0 e^{j(\omega t + kx)} \overrightarrow{e_y}$$

Avec

- $\underline{\overrightarrow{E_r}}$ le champ électrique de l'onde réfléchie (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- E_0 l'amplitude de l'onde incidente (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- ω la pulsation de l'onde incidente (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)
- k le nombre d'onde de l'onde incidente (en $\mathrm{rad \cdot m^{-1}}$)

La réflexion sur un métal parfait est totale.

Application [7]

Exprimer les champs électrique et magnétique réels totaux.

L'onde totale est une onde stationnaire pour laquelle l'interface est un nœud pour $\overrightarrow{E}$.
La réflexion de l'onde sur le métal induit un courant à sa surface.

Courant surfacique [8]

Hypothèses

- L'onde incidente s'écrit $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_y}$.
- L'onde arrive en incidence normale et l'interface est en $x = 0$.
- Le métal est parfait.

$$\overrightarrow{j_S} = \frac{2E_0}{\mu_0 c} \cos(\omega t) \overrightarrow{e_y}$$

Avec

- $\overrightarrow{j_S}$ le courant surfacique (en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$)
- E_0 l'amplitude de l'onde incidente (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)
- μ_0 la perméabilité magnétique du vide (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$)
- C la célérité de la lumière dans le vide.
- ω la pulsation de l'onde incidente (en $\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$)

2.4 Coefficient de réflexion en puissance

Il est possible de calculer le coefficient de réflexion en puissance.

Coefficient de réflexion en puissance [9]

Hypothèses

- L'onde incidente s'écrit $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_y}$.
- L'onde arrive en incidence normale et l'interface est en $x = 0$.
- Le métal est parfait.

$$R = 1$$

Avec

- $R = \frac{\|\langle \overrightarrow{\Pi_r} \rangle\|}{\|\langle \overrightarrow{\Pi_i} \rangle\|}$ le coefficient de réflexion en puissance (sans unité)
- $\overrightarrow{\Pi_i}$ et $\overrightarrow{\Pi_r}$ les vecteurs de Poynting incident et réfléchis (en $\mathrm{W \cdot m^{-2}}$)

2.5 Pression de radiation

La réflexion sur un métal parfait engendre une force surfacique sur lui appelée **pression de radiation**.

Force de Laplace pour un courant surfacique

$$\overrightarrow{\delta F} = \overrightarrow{j_S} \wedge \overrightarrow{B} dS$$

Avec

- $\overrightarrow{\delta F}$ la force de Laplace exercée sur la surface dS (en N)
- $\overrightarrow{j_S}$ le courant surfacique (en $\mathrm{A \cdot m^{-1}}$)
- $\overrightarrow{B}$ le champ magnétique (en T)
- dS la surface infinitésimale (en $\mathrm{m^2}$)

Pression de radiation 10

Hypothèses

- L'onde incidente s'écrit $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{j(\omega t - kx)} \overrightarrow{e_y}$.
- L'onde arrive en incidence normale et l'interface est en $x = 0$.
- Le métal est parfait.

$$P = \left\langle \frac{\left\|\overrightarrow{\delta F}\right\|}{dS} \right\rangle = 2\epsilon_0 E_0^2$$

Avec

- P la pression de radiation (en Pa)
- ϵ_0 la permittivité diélectrique du vide (en $\mathrm{F \cdot m^{-1}}$)
- E_0 l'amplitude de l'onde incidente (en $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$)

Application 11

La sonde spatiale IKAROS est le premier prototype utilisant une voile solaire comme moyen de propulsion. Sa voile mesure $173\,\mathrm{m^2}$. On assimile la lumière du Soleil à une onde électromagnétique monochromatique d'amplitude $600\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$. Calculer la force subie par la sonde.

TD

1 Réflexion et transmission sur un plasma

Une onde plane progressive monochromatique de pulsation ω, polarisée rectilignement suivant $\overrightarrow{u_z}$, se propageant dans le sens des x croissants avec le vecteur d'onde $\overrightarrow{k} = k\overrightarrow{u_x}$. Elle arrive sous incidence normale sur le plasma de densité électronique N. L'interface vide-plasma a pour équation $x = 0$, le plasma occupe le demi-espace $x > 0$.

On étudie le champ transmis $\underline{\overrightarrow{E_t}} = \underline{E_{t0}} e^{i(\omega t - k_p x} \overrightarrow{u_z}$ dans le plasma et le champ réfléchi $\underline{\overrightarrow{E_r}} = \underline{E_{r0}} e^{i(\omega t + kx} \overrightarrow{u_z}$ connaissant le champ incident $\underline{\overrightarrow{E_i}} = E_0 e^{i(\omega t - kx} \overrightarrow{u_z}$.

1. Calculer la conductivité complexe du plasma $\underline{\gamma}$ à la pulsation ω.
2. Montrer que la densité volumique de charges est nulle dans le plasma.
3. Établir l'équation de dispersion $k_p(\omega)$ dans le plasma en posant $\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\epsilon_0}}$.
4. En déduire l'indice optique n du plasma défini par $n = \frac{c}{v_\phi}$ où v_ϕ est la vitesse de phase.
5. Calculer $\underline{E_r}$ et $\underline{E_t}$ en fonction de E_0 et de n.
6. Établir les expressions réelles des trois champs électriques et magnétiques dans le cas $\omega > \omega_p$. Les amplitudes seront exprimées en fonction de E_0 et n.
7. Définir et calculer les coefficients de réflexion et de transmission en puissance R et T, dans le cas $\omega > \omega_p$. Que vaut leur somme ?
8. Dans le cas $\omega < \omega_p$, que vaut le module de $\frac{1-\underline{n}}{1+\underline{n}}$? On notera ϕ l'argument de ce dernier.
9. Dans le cas $\omega < \omega_p$, établir les expressions réelles des champs électriques et magnétiques incidents et réfléchis.
10. Calculer R dans le cas $\omega < \omega_p$. En déduire T.

2 Réflexion et transmission entre deux cordes

Deux cordes différentes sont reliées en $x = 0$. Celle de gauche, numérotée 1, a une masse linéique μ_1 et celle de droite, numérotée 2, une masse linéique μ_2. Elles sont tendues sous une tension T.

Une onde harmonique se déplace dans le sens x croissants sur la corde 1. On observe qu'en $x = 0$, elle donne naissance à une onde réfléchie sur la corde 1 et à une onde transmise sur la corde 2. On modélise ces trois ondes par :

$$y_i(x,t) = y_{0i} e^{j(\omega_i t - k_i x)}$$

$$y_r(x,t) = y_{0r} e^{j(\omega_i r + k_r x)}$$

$$y_t(x,t) = y_{0t} e^{j(\omega_t t - k_t x)}$$

1. Commenter les expression des trois ondes

2. En analysant la position de la jonction entre les deux cordes, montrer que les trois pulsations temporelles sont identiques.

3. En appliquant le principe fondamental de la dynamique sur la jonction de masse nulle, établir les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude $r = \frac{y_{0r}}{y_{0i}}$ et $t = \frac{y_{0t}}{y_{0i}}$, en fonction des célérités c_1 et c_2 dans les cordes.

3 Réflexion et transmission entre deux câbles

Deux câbles coaxiaux différents, d'impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 sont mis bout à bout en $x = 0$. Une onde harmonique est émise dans le câble occupant les abscisses $x < 0$, qui se propage dans le sens des x croissants.

1. Proposer une modélisation mathématique pour les ondes incidentes, réfléchies et transmises.

2. Quelles sont les conditions aux limites en x_0 ?

3. Définir et établir les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude pour la tension, à la jonction entre les deux câbles. Conclure quant à la nécessité d'assurer une adaptation d'impédance lors de la mise en série de deux câbles coaxiaux.

4. On définit les coefficients de réflexion (resp. transmission) en puissance, par la valeur absolue du rapport entre la valeur moyenne de la puissance réfléchie (resp. transmise) sur la valeur moyenne de la puissance incidente. Calculer ces deux coefficients. Quelle relation simple les lie ?