Connaissance de cours Maths

chapitre 10 :

-Différente définition des limites :

f a pour limite l en x_0 : $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ / $\forall x \in D_f$, $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

f a pour limite $+\infty$ en x_0 : $\forall M>0$, $\exists \delta>0$ / $\forall x \in D_f$, $|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M$

f a pour limite $-\infty$ en x_0 : $\forall M<0$, $\exists \delta>0$ / $\forall x \in D_f$, $|x-x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M$

f a pour limite l en $+\infty$: $\forall \varepsilon>0$, $\exists A>0$ / $\forall x \in D_f$, $x \geq A \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$: $\forall M \in \mathbb{R}$, $\exists A>0$ / $\forall x \in D_f$, $x \geq A \Rightarrow f(x) > M$

(les dernières peuvent être un peu modifier afin de définir les limite en $-\infty$)

- soit I un intervalle, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$

  si f admet une limite en x_0 alors $f(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

-Formes indéterminées :

« $\infty - \infty$ »   « $\dfrac{0}{0}$ »   « $0 \times \pm\infty$ »   « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ »   « 1^∞ »

-Limites de référence en 0:

$\lim x\ln(x) = 0$ $\lim \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ $\lim \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ $\lim \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

-Théorème des limites monotones

-Théorème (caractérisation séquentielle des limites)

Théorème des gendarmes

(Page 6)

-Continuité d'une fonction : soit $x_0 \in I$

- définition : f est continue en x_0 lorsque f admet une limite finie en x_0 (f n'admet pas de « trou »)

  $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$ / $\forall x \in I$, $|x-x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$

- f est continue a gauche en x_0 : si f admet une limite finie en x_0^- qui vaut $f(x_0)$
- f est continue a droite en x_0 : si f admet une limite finie en x_0^+ qui vaut $f(x_0)$

-Si f n'est pas définie en x_0 mais que f est continue a gauche et a droite en x_0 et que ces limites coïncident alors :

- On peut prolonger f par continuité, en posant $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$

-Si x_0 est une borne de I (par exemples la borne inférieur $[x_0 ; l\,]$) : Si $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ existe et est finie (limite a gauche) :

- On prolonge par continuité, en posant $f(x) = \lim_{x_0} f(x)$

(de façon analogue si x_0 est la borne supérieur de I)

-Méthode pour décider si f est continue en x_0 :

- On étudie les limites a droite et a gauche en x_0 :
- f est continue en x_0 SI :
  - les limites existent et sont finies
  - les limites coïncident (${\lim_{x_0^-}} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x)$
  - SI $\lim_{x_0^-} f(x) = \lim_{x_0^+} f(x) = f(x_0)$

-Théorème des valeurs intermédiaires (TVI) :

- soit $[a;b] \subset \mathbb{R}$ et $f \in C^0([a;b] ; \mathbb{R})$. ($x \in [a;b]$)
  $\forall$ k compris entre f(a) et f(b) , l'équation f(x)=k admet au moins une solution sur [a;b]

-Extension aux fonctions complexes (p.11)

Chapitre 11 :

- Polynôme nul : $\forall$ k $\in$ [0,n] , $a_k = 0$; P=0
- (P≠0) le degré du Polynôme P : le plus grand indice dont le coefficient est non nul
  - noté deg(P)
  - deg(0) = $-\infty$
- Polynôme constant :
  - $\forall$ k $\in$ [1,n] , $a_k = 0$
  - deg(P) $\in$ {0 ; $-\infty$}
  - P $\in \mathbb{K}$
- Coefficient dominant de P : coefficient devant le plus grand indice ($a_{deg(P)}$)
- P est unitaire : $a_{deg(P)} = 1$ (coefficient devant le plus grand indice vaux 1)
- P est un monôme : de la forme aX^d (n'a qu'un seul coefficient non nul)

-Opérations sur les polynômes et sur leur degré : Addition, multiplication par un scalaire, produit, composition(p.2)

- Arithmétique des polynômes :
- A est multiple de B : $\exists$ Q $\in \mathbb{K}[X]$ / A = QB
- A est divisible par B ; B est un diviseur de A : B|A (deg(B) $\leq$ deg(A))
- A et B sont associés : Si A|B et B|A alors $\lambda \in \mathbb{K}^*$ A = λB

-Savoir faire une division euclidienne de polynômes

-Connaître la formule de dérivations du polynôme P

-Formule de Leibniz
-Formule de Taylor

-Racine d'un polynôme
- a est racine de P ssi (X-a)|P
- Un polynôme de degré n>0 admet, au plus, n racines distinctes
- Trouver l'ordre de multiplicité de la racine a de P (a est racine n fois si $(X-a)^n|P$)
  - n est l'ordre de multiplicité de a si, et seulement si :

$$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(n-1)}(a)=0 \quad \text{et } P^{(n)} \neq 0$$

- Somme et produit des racine d'un polynôme (p10-11)

-Polynôme scindé :
- Théorème d'Alembert-Gauss : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé
  - Polynôme irréductible de $\mathbb{C}[X]$: deg = 1
  - Polynôme irréductibles de $\mathbb{R}[X]$: deg = 1 et deg = 2 avec $\Delta < 0$

-Savoir décomposer en éléments simples des fonctions rationnelles

Chapitre 12 :

-Formule de dérivation :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

-Connaître ses dérivations : des fonctions usuelles, produit, quotient , composition , par un scalaire….

-Théorème de la limite de la dérivée (p.5)

-Savoir trouver les extrema d'une fonction

-Théorème de la bijection (p.8)

-Théorème de Rolle

-Théorème des Accroissement finis (TAF)

-Théorème : Inégalité des Accroissements Finis (IAF) + (fonctions M-lipschitzienne)

-Les fonctions Convexes :

$f[a*(1-\lambda)+\lambda b] \leq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$

- C_f est situé sous ses sécantes
- f' est croissante sur I
- C_f est situé au-dessus de ses tangentes
- $f'' > 0$ sur I

-Les fonctions Concaves :

$f[a*(1-\lambda)+\lambda b] \geq (1-\lambda)f(a) + \lambda f(b)$

C_f est situé au-dessus de ses sécantes

f' est decroissante sur I

C_f est situé en-dessous de ses tangentes

$f'' < 0$ sur I

Chapitre 13 :

(-Opérations dans un espace vectoriel)

-Savoir si F est un Sous-Espace vectoriel de E :

- Regarder si $\vec{0}_E$ est dans F
  - Oui : déterminer si F est stable par CL (si oui alors c'est un SEV)
  - Non : conclure que F n'est pas un SEV de E

-Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs : (p.6)

-F est une droite vectorielle de E : F=Vect(u) ; u≠0
-F est un plan vectoriel de E : F=Vect(u,v) avec u et v non colinéaires

-La somme F+G est directe si $u=u_F + u_G$ est unique, pour tout u.
→ Plus facile : montrer que FnG = {0}

-F et G sont supplémentaire si F⊕G = E

- lorsque la somme est directe (mq FnG = {0})
- et qu'elle vaut l'espace entier : pour tout vecteur $\vec{x}$ ϵ E prouver que $\vec{x}$ ϵ F+G

-Famille libre : unique combinaison linéaire nulle est triviale(évidente)
$\Sigma\lambda_i u_i = 0 \Rightarrow$ pour tout i, $\lambda_i=0$
-Famille liée : cas contraire

-Famille génératrice (p.11) : elle génère l'espace entier

-Une famille est une base : elle est libre et génératrice

- connaître les bases canoniques dans les espaces de référence.
- soit F une famille de vecteurs de E :
  - F est une base <=> tout v ϵ E s'écrit de façon unique comme CL des vecteurs de F

Méthode (p.12)

-Base adaptée de F+G (p.13)