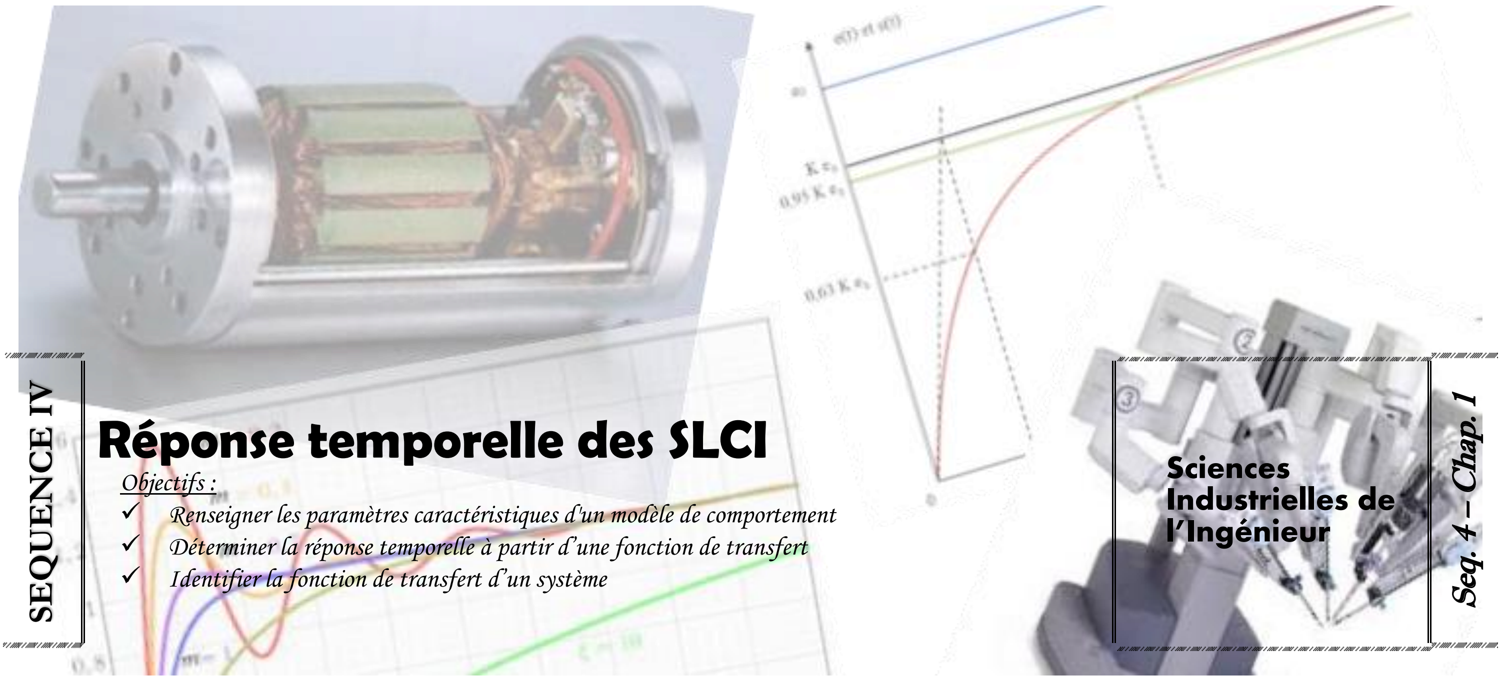


SEQUENCE IV

Réponse temporelle des SLCI

Objectifs :

- ✓ *Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement*
- ✓ *Déterminer la réponse temporelle à partir d'une fonction de transfert*
- ✓ *Identifier la fonction de transfert d'un système*

Sciences Industrielles de l'Ingénieur

Seq. 4 – Chap. 1

Chapitre 1

Cours

Déterminer la réponse d'un premier ordre

Prérequis

- ✓ *Séquence 2*

Objectifs

- ✓ *Renseigner les paramètres caractéristiques d'un modèle de comportement du premier ordre*
- ✓ *Déterminer la réponse temporelle d'un système du premier ordre*

Savoir-faire associés

M. II. 5 / R. I. 1. a / R. I. 2. a

PLAN DU CHAPITRE

Les moteurs électriques sont modélisables par une fonction de transfert du premier ordre.

L'analyse temporelle d'un système vise à étudier son comportement pour des sollicitations types en entrée. Ces entrées types sont classiquement : le Dirac, l'échelon unitaire et la rampe. La stratégie généralement utilisée en SII est la suivante :

- Effectuer la transformée de Laplace de l'équation différentielle du système et celle de la fonction d'entrée
- Exprimer la sortie dans le domaine de Laplace
- Effectuer la transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir en temporel), à l'aide du tableau des transformées usuelles. Il faut préalablement la décomposer en éléments simples pour faire apparaitre les éléments du tableau.

I. Système à action proportionnelle

Un grand nombre de systèmes peuvent être modélisés par une constante, c'est à dire une relation de proportionnalité directe entre l'entrée et la sortie :

$$s(t) = K \cdot e(t)$$

> **Définition 1 – Gain :** La constante de proportionnalité est alors appelée le gain du système

On peut ainsi modéliser par une constante la majorité des composants tels que ceux présentés Figure 1 :

- Ceux qui transmettent l'énergie sans changer sa nature : les transmetteurs (réducteur à roue et vis sans fin, à engrenages, système vis-écrou...),
- Les composants qui distribuent l'énergie : préactionneurs (variateur),
- Les capteurs (potentiomètre, génératrice tachymétrique...).

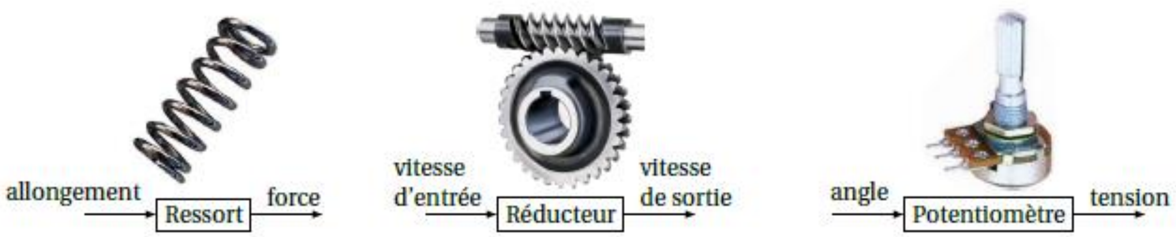


Figure 1 : *Exemple de système modélisable par un gain pur*

> **Exemple 1 :** Gain d'un ressort :
> La relation reliant la force exercée sur le ressort F(t) (sortie) à l'allongement x(t) (entrée) est donnée par la relation : $\mathbf{F(t) = K \cdot x(t)}$ où K est la raideur du ressort.
> Ainsi le gain K du système est alors égal à K

Dans l'espace de Laplace, on obtient :

$$S(p) = K \cdot E(p)$$

> **Propriété 1 :** La fonction de transfert d'un système à action proportionnelle est :
>
> $$\mathbf{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = K}$$

II. Système à action intégrale

Une relation fondamentale lors de la modélisation des systèmes mécaniques est la relation permettant de passer de la vitesse v(t) à la position x(t) (ou de l'accélération a(t) à la vitesse v(t)) :

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

Ainsi la position x(t) est donnée par la relation :

$$x(t) = \int v(t) \cdot dt$$

Ce qui donne dans le domaine de Laplace :

$$X(p) = \frac{V(p)}{p}$$

Propriété 2 : La fonction de transfert d'un système à action intégrale est :

$$\mathbf{H(p)} = \frac{\boldsymbol{X(p)}}{\boldsymbol{V(p)}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{p}}$$

III. Système du premier ordre

Le comportement d'un système du premier ordre est caractérisé par une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants. La transformée de Laplace conduit à l'écriture de la fonction de transfert (lorsque les conditions initiales sont nulles).

Définition 2 – Système du premier ordre : La forme générale de l'équation différentielle caractéristique d'un système du premier ordre est :

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \frac{\mathbf{ds(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{s(t)} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e(t)}$$

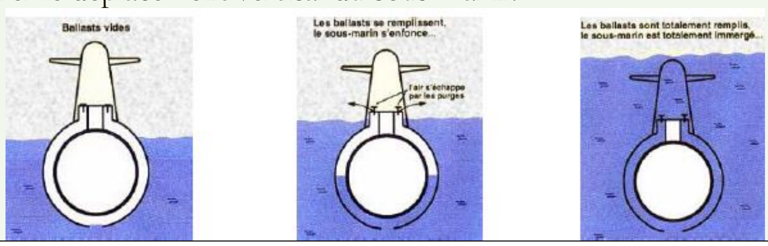
Avec $\boldsymbol{\tau}$, la constante de temps du système (en seconde) et K le gain du système

Propriété 3 : La fonction de transfert d'un système à du premier ordre est :

$$\mathbf{H(p)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{p}}$$

K, le gain statique caractérise le comportement statique tandis que $\boldsymbol{\tau}$, la constante de temps, caractérise le comportement dynamique.

Exemple 2 : Sous-marin à ballast :
Pour s'immerger ou remonter à la surface, les sous-marins utilisent des ballasts qui peuvent être plus ou moins remplis d'eau ou d'air. La poussée d'Archimède est alors modifiée et permet de ne plus s'opposer au poids du sous-marin et ainsi gérer le déplacement vertical du sous-marin.



Le principe fondamental de la dynamique appliqué au sous-marin soumis à la poussée d'Archimède P(t), à la pesanteur et aux frottements visqueux de l'eau s'écrit :

$$m \cdot \frac{dv(t)}{dt} = -f \cdot v(t) + P_a(t) - m \cdot g$$

On pose P(t)=$\mathbf{P_a(t) - m \cdot g}$, la force permettant de gérer la vitesse verticale du sous-marin. On obtient alors une équation différentielle du premier ordre entre l'entrée P(t) et la sortie v(t) :

$$\frac{\mathbf{m}}{f} \cdot \frac{\mathbf{dv(t)}}{\mathbf{dt}} + \mathbf{v(t)} = \frac{\mathbf{P(t)}}{f}$$

A. Réponse indicielle, à un échelon

1. Résolution analytique

La résolution de l'équation différentielle $\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K \cdot e_0 \cdot u(t)$ est habituellement obtenue en sommant :

- une solution particulière $s_p(t)$ qui caractérise le comportement du système pendant le régime permanent ou établi et qui est de la même forme que l'entrée du système
- une solution de l'équation différentielle sans second membre (équation homogène) $s_g(t)$ qui correspond au comportement du système pendant le régime transitoire.

Ainsi : $s(t) = s_p(t) + s_g(t)$

Résolution :

1. **Solution de l'équation homogène :**

On s'intéresse à l'équation :

$$\tau \cdot \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = 0$$

On cherche des solutions de la forme (On ajoute l'échelon u(t) à la fin de l'équation de manière à avoir une solution nulle pour les temps négatifs.) :

$$s_g(t) = A \cdot e^{r \cdot t} \cdot u(t)$$

En injectant cette solution dans l'équation différentielle homogène, on constate que, pour avoir des solutions non nulles, les coefficients r doivent vérifier une équation appelée équation caractéristique :

$$\tau \cdot r + 1 = 0$$

La racine de ce polynôme est :

$$r_1 = -\frac{1}{\tau}$$

La solution de l'équation homogène est donc :

$$s_g(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

2. Solution particulière :

On cherche $s_p(t)$ sous la même forme que le second membre, c'est-à-dire :

$$s_p(t) = B \cdot u(t)$$

On injecte cette solution dans l'équation différentielle :

$$0 + B \cdot u(t) = K \cdot e_0 \cdot u(t)$$

D'où :

$$s_p(t) = K \cdot e_0 \cdot u(t)$$

3. Solution générale :

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$s(t) = s_g(t) + s_p(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t) + K \cdot e_0 \cdot u(t)$$

Soit :

$$s(t) = (A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + K \cdot e_0) \cdot u(t)$$

4. Détermination de la constante A

On suppose que la sortie est nulle à $t = 0^+$, ainsi on a $s(0^+)=0$. On a donc :

$$A \cdot + K \cdot e_0 = 0$$

Soit :

$$A \cdot = -K \cdot e_0$$

Propriété 4 : La réponse temporelle à une entrée en échelon (réponse indicielle) d'un système du 1er ordre est donc :

$$\mathbf{s(t) = K \cdot e_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot u(t)}$$

2. Résolution dans le domaine de Laplace

Soit en entrée du système du premier ordre la fonction $e(t) = e_0 \cdot u(t)$. On applique la transformée de Laplace :

$$E(p) = \frac{e_0}{p}$$

La sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Soit :

$$S(p) = \frac{K}{1 + \tau \cdot p} \cdot \frac{e_0}{p}$$

On cherche à déterminer la transformée de Laplace inverse pour revenir dans le domaine temporel. Pour cela, on décompose en éléments simples :

$$S(p) = \frac{a}{p} + \frac{b}{1 + \tau \cdot p}$$

Pour trouver a et b, on réduit au même dénominateur :

$$S(p) = \frac{a \cdot (1 + \tau \cdot p) + b \cdot p}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

$$S(p) = \frac{p \cdot (a \cdot \tau + b) + a}{p \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

Par identification du numérateur :

$$\begin{cases} a = e_0 \cdot K \\ a \cdot \tau + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = e_0 \cdot K \\ b = -e_0 \cdot K \cdot \tau \end{cases}$$

On a alors :

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot K}{p} - \frac{e_0 \cdot K \cdot \tau}{1 + \tau \cdot p}$$

$$S(p) = \frac{e_0 \cdot K}{p} - \frac{e_0 \cdot K}{\frac{1}{\tau} + p}$$

On repasse dans le domaine temporel en utilisant les tableaux de transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = e_0 \cdot K \cdot u(t) - e_0 \cdot K \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \cdot u(t)$$

$$s(t) = e_0 \cdot K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot u(t)$$

Propriété 5 : La réponse indicielle d'un système du premier ordre est :

$$\mathbf{s(t) = K \cdot e_0 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \cdot u(t)}$$

Propriété 6 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 2 :

- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0) = 0}$
- Asymptote à l'infini : $\lim\limits_{t \to \infty} s(t) = e_0 \cdot K \cdot u(t)$
- La tangente à l'origine est une droite $y(t) = \frac{e_0 \cdot K}{\tau} \cdot t$ qui coupe l'asymptote en $\mathbf{t = \tau}$ pour $y(\tau) = e_0 \cdot K$
- En $\mathbf{t = \tau}$, $\mathbf{s(\tau) = 0.63 \cdot e_0 \cdot K}$, soit à 63% de la valeur finale de la sortie
- En $\mathbf{t = 3 \cdot \tau}$, $\mathbf{s(\tau) = 0.95 \cdot e_0 \cdot K}$, soit à 95% de la valeur finale de la sortie
- Le temps de réponse à 5 %, caractérisant la rapidité du système est : $\mathbf{t_{r5\%} = 3 \cdot \tau}$

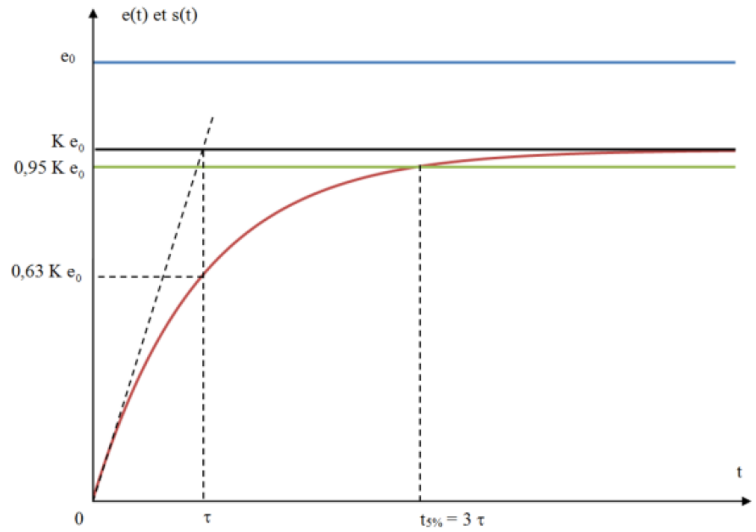


Figure 2 : *Réponse indicielle d'un système du premier ordre*

B. Réponse impulsionnelle, à un Dirac

L'entrée sous forme de Dirac s'écrit dans le domaine de Laplace :

$$E(p) = 1$$

D'où la sortie dans le domaine de Laplace :

$$S(p) = \frac{\boldsymbol{K}}{\mathbf{1+\tau\cdot p}}$$

Que l'on met sous la forme :

$$S(p) = \frac{\frac{K}{\tau}}{\frac{1}{\tau}+p}$$

Ce qui permet grâce au tableau des transformées de Laplace, le passage dans le domaine temporel.

Propriété 7 : La réponse indicielle d'un système du premier ordre est :

$$\mathbf{s(t) = \frac{\boldsymbol{K}}{\tau}\cdot e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot u(t)}$$

Propriété 8 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 3 :

- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\tau}}$
- Asymptote à l'infini : $\lim\limits_{t\to\infty} \boldsymbol{s(t)} = \mathbf{0}$
- La tangente à l'origine est une droite $\boldsymbol{y(t)} = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\tau}} - \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\tau^2}}\cdot \boldsymbol{t}$ qui coupe l'asymptote en $\mathbf{t = \tau}$ pour $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{0}$
- En $\mathbf{t = \tau}$, $\mathbf{s(\tau) = 0.37}\cdot\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\tau}}$, soit à 37% de la valeur finale de la sortie
- En $\mathbf{t = 3\cdot\tau}$, $\mathbf{s(\tau) = 0.05}\cdot\frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{\tau}}$, soit à 5% de la valeur finale de la sortie

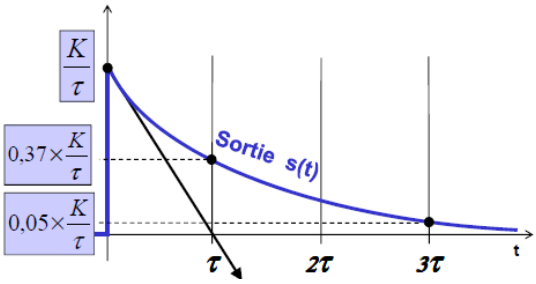


Figure 3 : *Réponse à un Dirac d'un système du premier ordre*

C. Réponse à une rampe

Soit en entrée du système du premier ordre la fonction $e(t) = a \cdot t \cdot u(t)$. On applique la transformée de Laplace :

$$E(p) = \frac{a}{p^2}$$

La sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) = H(p) \cdot E(p)$$

Soit :

$$S(p) = \frac{\boldsymbol{K}}{\mathbf{1 + \tau \cdot p}} \cdot \frac{a}{p^2}$$

On cherche à déterminer la transformée de Laplace inverse pour revenir dans le domaine temporel. Pour cela, on décompose en éléments simples :

$$S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{1 + \tau \cdot p}$$

Pour trouver a et b, on réduit au même dénominateur :

$$S(p) = \frac{\alpha \cdot p \cdot (1 + \tau \cdot p) + \beta \cdot (1 + \tau \cdot p) + \gamma \cdot p^2}{p^2 \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

$$S(p) = \frac{p^2 \cdot (\alpha \cdot \tau + \gamma) + p \cdot (\beta \cdot \tau + \alpha) + \beta}{p^2 \cdot (1 + \tau \cdot p)}$$

Par identification du numérateur :

$$\begin{cases} \alpha \cdot \tau + \gamma = 0 \\ \beta \cdot \tau + \alpha = 0 \\ \beta = a \cdot K \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = a \cdot K \cdot \tau^2 \\ \alpha = -a \cdot K \cdot \tau \\ \beta = a \cdot K \end{cases}$$

On a alors :

$$S(p) = -\frac{a \cdot K \cdot \tau}{p} + \frac{a \cdot K}{p^2} + \frac{a \cdot K \cdot \tau^2}{1 + \tau \cdot p}$$

$$S(p) = a \cdot K \cdot (\frac{1}{p^2} - \frac{\tau}{p} + \frac{\tau^2}{1 + \tau \cdot p})$$

On repasse dans le domaine temporel en utilisant les tableaux de transformée de Laplace inverse :

$$s(t) = a \cdot K \cdot (t - \tau + \tau \cdot \mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{t}}{\boldsymbol{\tau}}}) \cdot u(t)$$

Propriété 9 : Les propriétés et tracés remarquables sont résumés Figure 4 :

- Valeur à l'origine : $\mathbf{s(0) = 0}$
- Asymptote à l'infini : $\lim\limits_{t \to \infty} \boldsymbol{s(t) = a \cdot K \cdot (t - \tau)}$
- La tangente à l'origine est une droite $\boldsymbol{y(t) = a \cdot K \cdot (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}$

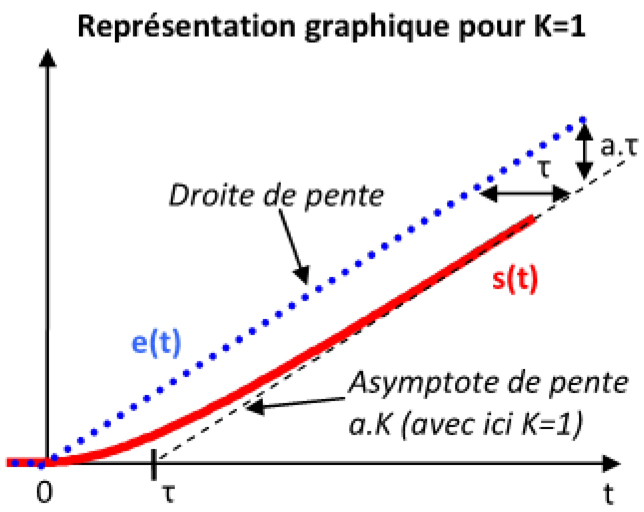


Figure 3 : *Réponse à une rampe d'un système du premier ordre*