Méthodes à retenir :

- Les solutions d'une équation de la forme $y'' = ay' + by$ sont données à l'aide des racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique $r^2 - ar - b = 0$.
  Si $r_1 = r_2$, y est de la forme $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta t e^{r_1 t}$
  Si $r_1 \neq r_2$, y est de la forme $t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ à déterminer en fonction des conditions initiales $y(t_0)$ et $y'(t_0)$.
  Pour trouver les solutions réelles lorsque $r_1 = \overline{r_2} = u + \mathbf{i}\omega$, avec $u, \omega \in \mathbb{R}$, il suffit de prendre les combinaisons linéaires des solutions complexes,
  de la forme $t \mapsto Ae^{ut}\cos(\omega t) + Be^{ut}\sin(\omega t)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$
- Etant données plusieurs équations différentielles, portant sur des fonctions $x_1, \dots x_n$, il est indispensable de savoir les réécrire sous la forme $X' = AX$, avec une matrice A que l'on sait expliciter.
- Lorsque A est **diagonalisable**, semblable à la matrice diagonale D, avec $D = P^{-1}AP$, pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, on a : $X' = AX \iff X' = PDP^{-1}X \iff (P^{-1}X)' = D(P^{-1}X)$, ce qui permet de se ramener à un système diagonal $Z' = DZ$

I. Révisions de PCSI

Exercice 1 ☆

Résoudre en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$:

$$y'' = \omega^2 y$$

Exercice 2 ☆

Résoudre en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$:

$$y'' = -\omega^2 y$$

Exercice 3 ☆

résoudre l'équation différentielle linéaire du 1er ordre :
$(E) \quad y' - 2y = e^{2t}$

Exercice 4 ☆

Résoudre l'équation différentielle linéaire du 2d ordre :
$(H) \quad y'' + 2y' - 3y = 0$
Soit $(E) \quad y'' + 2y' - 3y = -2\sin t - 4\cos t$.
En remarquant que $z : t \mapsto \cos t$ est solution, résoudre (E).

II. Applications directes du cours

Exercice 5 ☆☆

On souhaite résoudre le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \left\{ \begin{array}{lcll} x' & = & 2x - y & (1) \\ y' & = & -x + 2y & (2) \end{array} \right.$$

1. On pose $X : t \longmapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.
   Expliciter une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$
2. A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
3. en déduire les solutions de $(\mathcal{S})$.

Exercice 6 ☆☆

Résoudre :

$$y^{(3)} - y = 0$$

III. A savoir rédiger

Exercice 7 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est diagonalisable.

2) Soient λ_1, et λ_2 les valeurs propres de A, et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice P inversible telle que $D = P^{-1}AP$

3) Résoudre le système différentiel

$$(S) \ : \ \begin{cases} x' & = & x+y \\ y' & = & x-y \end{cases}$$

Exercice 8 ☆☆

Résoudre le système différentiel d'inconnue $(x,y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2$:

$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x' & = & x+3y \\ y' & = & y \end{cases}$$

IV. Exercices

Exercice 9 ☆☆☆

1. Résoudre le système différentiel d'inconnue $(x,y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2$:
$$(\mathcal{S}) \ : \ \begin{cases} x' & = & -x+2y \\ y' & = & -3x+4y \end{cases}$$
2. En déduire les solution du système différentiel $(x,y) \in (\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}))^2$:
$$(\mathcal{S}') \ : \ \begin{cases} x' & = & -x+2y-e^t \\ y' & = & -3x+4y-e^t \end{cases}$$

Exercice 10 ☆☆

Soient $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Et on pose $A = PDP^{-1}$.

1. Résoudre le système différentiel $Z' = DZ$, avec $Z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable.
2. Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec $X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dérivable.
3. Résoudre le système différentiel $X' = AX$, avec la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11 ☆☆

1) Justifier que le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \begin{cases} x' & = & tx+(1-t^2)y \quad (1) \\ y' & = & x-ty \quad (2) \end{cases}$$

admet une unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ satisfaisant la condition initiale : $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (\mathcal{CI})$

2) Montrer que si X est une solution de (S), alors x et y sont de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3) En dérivant (2), montrer que y est solution de l'équation différentielle : $y'' = 0 \quad (\mathcal{E})$

4) En déduire l'ensemble des solutions de $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{CI})$.

Exercice 12 ☆☆☆

On pose, pour t réel, le système différentiel :

$$\begin{cases} x' & = & z+\cos(t) \\ y' & = & y+3\exp(2t) \\ z' & = & x+\sin(t) \end{cases}$$

1. Donner la solution générale du système.
2. Donner les solutions qui vérifient $x(0) = z(0)$ et telle que x et z sont bornées sur $\mathbb{R}^+$.

V. Pour aller plus loin

Exercice 13 ☆ ☆

Soit $(E) \quad ty' + y = 0$

1. Montrer que l'ensemble S_+ des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_*^+$ est $S_+ = \left\{]0, +\infty[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto \lambda \frac{1}{t};\ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
2. Montrer que l'ensemble S_- des solutions de (E) sur $\mathbb{R}_*^-$ est $S_- = \left\{]-\infty, 0[\to \mathbb{R},\ t \longmapsto \mu \frac{1}{t};\ \mu \in \mathbb{R} \right\}$.
3. En déduire que l'ensemble des solutions (dérivable) sur $\mathbb{R}$ est réduit à $\{t \mapsto 0\}$.

Exercice 14 ☆ ☆

On considère le champ de vecteurs défini par

$$(C) \left\{ \begin{array}{lcll} x' & = & y & (1) \\ y' & = & -x & (2) \end{array} \right.$$

1) En posant $(x, y) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$ pour des fonctions $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ et $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, exprimer $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ en fonction de ρ, θ, $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

2)Même question pour $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

3) En déduire l'ensemble $\mathcal{L}$ des solutions de (C).

Exercice 15 ☆ ☆☆ ☆

Résoudre l'équation différentielle :

$(E) \quad (1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 2$, d'inconnue $y :]0, 1[\to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $I =]0, 1[$

(remarquer que $y_1 : x \mapsto x$ est une solution particulière de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur I, et chercher une solution sous la forme $y_2 : x \mapsto \lambda(x)\ x$ avec λ fonction dérivable)

Exercice 16

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$(\mathcal{L}) \quad t(t+1)y'' - y' - 2y = 3t^2$$

1. Montrer qu''il existe un monôme ($t \longmapsto t^p$ pour $p \in \mathbb{N}$) solution de l'équation homogène
$$(\mathcal{H}) \quad t(t+1)y'' - y' - 2y = 0$$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln(x+1)$ est solution de $(\mathcal{H})$.

Exercice 17 *TPE-EIVP*

Soit l'équation différentielle $(E) : y'' + (2 - \cos(t^2))y = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E) à valeurs strictement négatives.

1. Montrer que f'' est à valeurs positives.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Rappeler l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a
3. En déduire que f est constante.
4. En déduire une contradiction puis conclure.

Exercice 18 *Centrale PC 2018*

On considère l'équation différentielle

$(E) : ty' - y = 1 - \mathrm{e}^t$.

Préciser les solutions sur $]0, +\infty[$et $]-\infty, 0[$ de (E).

Ces solutions peuvent-elles être prolongées par continuité en 0 ? Ce prolongement est-il dérivable ?

Donner un équivalent de ces solutions en $0, +\infty, -\infty$.

Notes

[1] correction : polynôme caractéristique $r^2 - \omega^2 = (r-\omega)(r+\omega)$, solutions $t \mapsto \lambda e^{\omega t} + \mu e^{-\omega t}$

[2] correction : polynôme caractéristique $r^2 + \omega^2 = (r - \mathbf{i}\omega)(r + \mathbf{i}\omega)$, solutions $t \mapsto \lambda e^{\mathbf{i}\omega t} + \mu e^{-\mathbf{i}\omega t}$, solutions réelles $t \mapsto a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)$

[3] correction : SP $t \mapsto te^{2t}$, SH $t \mapsto tle^{2t}$ $y(x) = (x + C1) * exp(2 * x)$

[4] correction : SP $t \mapsto te^{2t}$, SH $t \mapsto le^{2t}$

[16] correction : $y(x) = (C1 * (ln(x) + 1/x - 1/(2 * x^2) - \ln(x+1)) + C2) * x^2$

$y(x) = (x - 1/2 - x^2 * ln(x+1) + ln(x) * x^2) * C1 + x^2 * C2 + x^2 * \ln(x+1)$

[17] correction :

f' est croissante. $y = f(a) + (x-a)f'(a)$

comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-a) = +\infty$, on doit donc avoir $f'(a) \leq 0$, puisque f ne prend que des valeurs négatives.

De même, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-a) = -\infty$, on doit donc avoir $f'(a) \geq 0$

Ainsi, $f'(a) = 0$, ce pour tout $a \in \mathbb{R}$. donc f est constante.

Or (E) n'admet pas de solution constante non nulle, ce qui est impossible puisque f prend des valeurs strictement négatives.

Conclusion f prend au moins une valeur positive.