I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆☆

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre $\Omega(1,1,0)$ et de rayon 2.

Exercice 2 ☆☆

Dans $\mathbb{R}^3$ pour la norme $\| \ \|$ euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(1,-1,1)$ au plan d'équation $x+z=0$.

II. A savoir rédiger

Exercice 3 ☆☆

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 ☆☆

Justifier que $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 = 1+y\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

III. Exercices

Exercice 5 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives $\delta_1, \dots, \delta_n)$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.

1. Décomposer X dans une base orthonormée $(e'_1, \dots, e'_n)$ de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de A.
2. Justifier que pour les fonctions coordonnées (x_i) correspondantes, on a : $\forall t, \ \sum_{i=1}^{n} x'_i(t) x_i(t) \geq 0$
3. En déduire une expression de la fonction $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I.

Exercice 6 ☆☆☆ *Fermé*

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); \ \det(M) = 0\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^n$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 7 ☆☆

Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$.

On note $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in F\}$

1. si $x \in F$, justifier que $d(x, F) = 0$
2. Supposons que $d(x, F) = 0$
   (a) justifier l'existence d'une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$
   (b) Montrer que la suite y_n est convergente, vers une limite que l'on précisera.
   (c) En utilisant le fait que F est une partie fermée, montrer que $x \in F$.
3. En déduire que
   $$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Exercice 8 ☆☆☆☆

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$
   Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bar{A}$
   (b) En déduire que $\bar{A}$ est convexe.
2. (a) Soient $a, b \in A^\circ$, et $r_a, r_b > 0$ tels que $B(a, r_a) \subset A$ et $B(b, r_b) \subset A$.
   En notant $r = \min(r_a, r_b)$, justifier que pour tout $x \in B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r)$, il existe $u \in B(0, 1)$ tel que :
   $$x = \lambda a + (1 - \lambda)b + ru$$
   (b) En remarquant que $a' = a + ru \in A$ et que $b' = b + ru \in A$, justifier que le segment $[a', b'] = \{ta' + (1 - t)b'; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans A.
   (c) En déduire que $x \in A$
   (d) En déduire que $B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r) \subset A$
   (e) La partie A° est-elle convexe ?

V. Pour aller encore plus loin

Exercice 9 ☆☆ *fonctions höldériennes*

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\|\ \|$ une norme sur E. Soit $h : E \to E$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant : $\forall (x, y) \in E^2,\ \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E.

Exercice 10 ☆☆☆

Soient E un $\mathbb{R}$-e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E, et pour tout t réel, $f(t) = \|at + b\|$;

a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;

b) prouver que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$;

c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at + b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Notes

[1] correction : Utiliser la définition de boule fermée