

Table des matières

I. Intégration sur un segment	3
I.1 Rappels de PCSI : Intégrales de Riemann	3
I.2 Lien entre primitive et dérivée	4
I.3 Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment	4
3.a) Définition	4
I.4 Propriétés des intégrales sur un segment	5
II. Intégrales généralisées d'une fonction continue ou continue par morceaux	6
II.1 Convergence d'une intégrale sur un intervalle $[a, +\infty[$	6
1.a) Définition	6
1.b) Intégrales de référence	6
II.2 CNS de convergence pour une fonction à valeurs positives.	7
II.3 Convergence ou divergence sur un intervalle quelconque	7
3.a) Définition de la convergence	7
3.b) Intégrales de référence	8
III. Fonctions intégrables	9
III.1 Absolue convergence d'une intégrale	9
III.2 Intégrabilité	9
III.3 Fonctions de référence	10
III.4 Théorèmes de comparaison	10
IV. Espace des fonctions intégrables	11
IV.1 Notations	11
IV.2 CS nullité fonction intégrable continue	11
IV.3 CNS intégrabilité des fonctions positives	12
V. Propriétés usuelles	13
V.1 Linéarité	13
V.2 Positivité, croissance	13
V.3 Relation de Chasles	13
V.4 IPP généralisée	14
V.5 CDV généralisé	14
V.6 Intégration sur un intervalle quelconque	16

Pré-requis

Intégrale d'une fonction continue sur un segment, convergence des sommes de Riemann. Primitive d'une fonction continue, théorème fondamental du calcul différentiel.

Objectifs

Donner du sens aux intégrales du cours de physique ou chimie ayant des bornes infinies ou des bornes ouvertes. Servira à étudier la nature de certaines séries numériques. On généralise les propriétés de l'intégrales sur un segment aux fonctions intégrables sur un intervalle quelconque.

- **chercher, mettre en oeuvre des stratégies** : découvrir une problématique, l'analyser, la transformer ou la simplifier, expérimenter sur des exemples, formuler des hypothèses, identifier des particularités ou des analogies;
- **modéliser** : extraire un problème de son contexte pour le traduire en langage mathématique, comparer un modèle à la réalité, le valider, le critiquer;
- **représenter** : choisir le cadre (numérique, algébrique, géométrique...) le mieux adapté pour traiter un problème ou représenter un objet mathématique, passer d'un mode de représentation à un autre, changer de registre;
- **raisonner, argumenter** : effectuer des inférences inductives et déductives, conduire une démonstration, confirmer ou infirmer une conjecture;
- **calculer, utiliser le langage symbolique** : manipuler des expressions contenant des symboles, organiser les différentes étapes d'un calcul complexe, effectuer un calcul automatisable à la main où à l'aide d'un instrument (calculatrice, logiciel...), contrôler les résultats;
- **communiquer** à l'écrit et à l'oral : comprendre les énoncés mathématiques écrits par d'autres, rédiger une solution rigoureuse, présenter et défendre un travail mathématique.

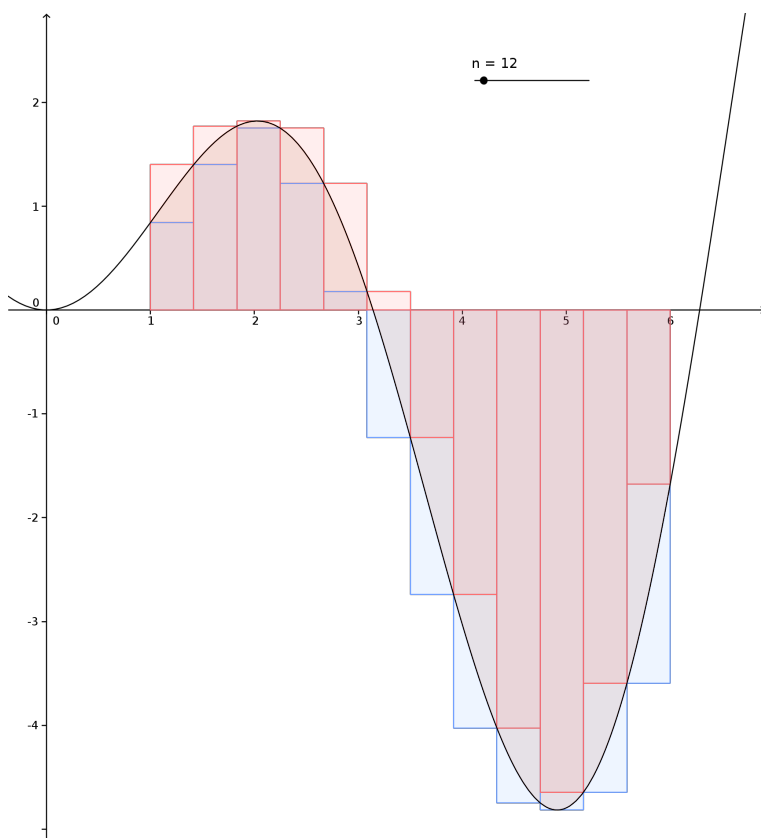
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

I. Intégration sur un segment

I.1 Rappels de PCSI : Intégrales de Riemann

lemme 1. Etant donnés deux réels $a < b$ et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue, la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$



Définition 1 (Intégrale de Riemann).

Etant donnés deux réels $a < b$ et $f \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ on appelle **intégrale de** f sur le segment $[a, b]$ le nombre noté $\int_{[a,b]} f$, ou $\int_a^b f$, ou $\int_a^b f(t) dt$, défini par :

$$\int_{[a,b]} f = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f\left(a + \frac{k(b-a)}{N}\right)$$

Remarque 1. Cette définition s'étend immédiatement à toute fonction continue sur $]a, b[$ et prolongeable par continuité en a et b : on ne change pas la valeur d'une intégrale en changeant la valeur en l'une de ses bornes.

I.2 Lien entre primitive et dérivée

Théorème 2 (théorème fondamental du calcul intégral).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.

i) l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

ii) Pour toute primitive H de f sur I , et tout $x \in I$, on a : $\int_a^x f(t) dt = H(x) - H(a)$.

iii) Si $G \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$, alors pour tout $(a, x) \in I^2$, $G(x) - G(a) = \int_a^x G'(t) dt$.

I.3 Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment

3.a) Définition

Définition 2.

Soit $I = [a, b]$ un segment. On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est **continue par morceaux** sur I s'il existe un entier m , une subdivision $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ de I tels que pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, en notant $I_i =]x_i, x_{i+1}[$, on ait :

$$f|_{I_i} : I_i \rightarrow \mathbb{K} \text{ est prolongeable par continuité sur } I_i.$$

exemple 1. $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^2 & \text{si } t < 1 \\ -1 - t & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0, 2]$
(prendre la subdivision $0 < 1 < 2$).

Notation 1. On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans \mathbb{K} .
On peut étendre cette notion aux fonctions définies sur un intervalle :

Définition 3.

Soit $J =]a, c[$ un intervalle. On dit que $f : J \rightarrow F$ est **continue par morceaux** sur J si elle est continue par morceaux sur tout segment $I \subset J$.

exemple 2. la partie entière $x \mapsto E(x)$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}
(prendre des subdivision $a < E(a) + 1 < \dots < E(b) < b$ sur tout segment $[a, b]$).

Remarque : $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}) \subset \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$

exemple 3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} t^2 & \text{si } t < 1 \\ -1 - t & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$ est continue par morceaux sur \mathbb{R}
(prendre la subdivision $a < 1 < b$ sur tout segment $[a, b]$ contenant 1).

Définition 4.

Soit $I = [a, b]$ un segment, $f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K})$, m un entier et une subdivision adaptée $x_0 = a < x_1 < \dots < x_m = b$ de I , i.e. pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, en notant $I_i =]x_i, x_{i+1}[$, $f|_{I_i}$ est continue et se prolonge par continuité en ses extrémités.

On appelle **intégrale de f** sur le segment $[a, b]$ le nombre noté $\int_a^b f(t) dt$ défini par :

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{I_i} f = \sum_{i=1}^m \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{x_{i+1} - x_i}{N} f \left(x_i + \frac{k(x_{i+1} - x_i)}{N} \right)^+ \right)$$

Théorème 3 (théorème fondamental du calcul intégral pour les fonctions continues par morceaux).

Soient I un intervalle, $a \in I$ et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$.

i) l'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

1.4 Propriétés des intégrales sur un segment

Proposition 4 (linéarité).

L'intégrale est linéaire :

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{K}), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

Proposition 5 (croissance).

L'intégrale est croissante :

$$\forall f, g \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \forall t \in [a, b], f(t) \leq g(t) \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$$

Proposition 6 (positivité).

L'intégrale est positive :

$$\forall f \in \mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R}), \forall t \in [a, b], f(t) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(t) dt \geq 0$$

Remarque 2. Les propriétés de changement de variables, relation de Chasles, etc vues en PCSI sur les segments pour les fonctions continues restent vraies pour les fonctions continues par morceaux.

II. Intégrales généralisées d'une fonction continue ou continue par morceaux

II.1 Convergence d'une intégrale sur un intervalle $[a, +\infty[$

1.a) Définition

Définition 5 (Intégrale généralisée convergente sur $[a, +\infty[$).

Etant donné un réel a et $f \in C^0([a, +\infty[, \mathbb{K})$ (resp. $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{K})$) on dit que **l'intégrale généralisée** de f sur $[a, +\infty[$ (impropre au voisinage de $+\infty$) **converge** lorsque la limite suivante **existe et est**

FINIE : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt$

En cas de convergence, on note $\int_a^{+\infty} f$ ou $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

exemple 4. L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ diverge, car $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ a pour primitive $F : x \mapsto \ln(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite finie en $+\infty$.

exemple 5. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t) - t \sin(t) dt$ diverge, car $f : x \mapsto \cos(x) - x \sin(x)$ a pour primitive $F : x \mapsto x \cos(x)$ et $F(x)$ n'a pas de limite en $+\infty$.

1.b) Intégrales de référence

Proposition 7 (Intégrales de Riemann).

Soit α un réel.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

De plus, on a : $\forall \alpha > 1, \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}$.

démonstration : pour $\alpha = 1$ on primitive $x \mapsto x^{-1}$ en $x \mapsto \ln x$; pour $\alpha \neq 1$, on primitive $f : x \mapsto x^{-\alpha}$ en $F : x \mapsto \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\alpha + 1 < 0$, ie ssi $1 < \alpha$. \square

Proposition 8 (exponentielles).

Soit β un réel.

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt$ converge si et seulement si $\beta > 0$.

De plus, on a : $\forall \beta > 0, \int_0^{+\infty} e^{-\beta t} dt = \frac{1}{\beta}$.

démonstration : pour $\beta \neq 0$, on primitive $f : x \mapsto e^{-\beta x}$ en $F : x \mapsto \frac{e^{-\beta x}}{-\beta}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 0$. \square

II.2 CNS de convergence pour une fonction à valeurs positives.

Proposition 9 (C.N.S de convergence pour une fonction positive sur $[a, +\infty[$).

Etant donné un réel a et $f \in \mathcal{CM}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ à valeurs positives, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

démonstration : Par positivité de l'intégrale, $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est croissante, et à valeurs positives. Elle admet une limite ℓ finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, vu en PCSI \square

exemple 6. $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$ converge.

II.3 Convergence ou divergence sur un intervalle quelconque

3.a) Définition de la convergence

Définition 6 (Intégrale généralisée convergente sur un intervalle réel qq).

Etant donné I un intervalle de bornes α et β réelles ou infinies, avec $\alpha < \beta$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$, on dit que l'**intégrale généralisée** de f sur I (impropre en les bornes infinies ou les bornes finies sans prolongement par continuité) converge lorsque la limite suivante **existe et est FINIE** :

$$\lim_{x \rightarrow \alpha^+, y \rightarrow \beta^-} \int_x^y f(t) dt$$

En cas de convergence, on note $\int_{\alpha}^{\beta} f$ ou $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ la valeur de cette **limite finie**.

On dit que l'intégrale généralisée **diverge** sinon.

Remarque 3. Il s'agit d'une généralisation à un intervalle quelconque I , avec $\alpha = \inf I$ et $\beta = \sup I$, on dit que l'intégrale de $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ converge si $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} \lim_{y \rightarrow \beta^-} \int_x^y f(t) dt$ existe et est FINIE.

Cela permet de considérer des intervalles de la forme $] - \infty, +\infty[,] - \infty, b],]a, b], [b, a[,$ etc...

Remarque 4. Ainsi pour étudier la convergence d'une intégrale généralisée d'une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$:

1. On justifie la régularité de f continue par morceaux sur I , ou continue.
2. On détermine les éventuelles bornes infinies, et les valeurs éventuelles de discontinuité de f .
3. En chaque borne impropre finie, on justifie l'existence d'une limite finie lorsque l'on se rapproche de cette borne impropre.

3.b) Intégrales de référence

Proposition 10 (Intégrales de Riemann).

Soit γ un réel.

L'intégrale généralisée $\int_0^1 t^{-\gamma} dt$ converge si et seulement si $\gamma < 1$.

De plus, on a : $\forall \gamma < 1, \int_0^1 t^{-\gamma} dt = \frac{1}{1-\gamma}$.

démonstration : on primitive $f : x \mapsto x^{-\gamma}$ en $F : x \mapsto \frac{x^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}$. $F(x)$ admet une limite finie (et nulle) en $+\infty$ si et seulement si $-\gamma+1 > 0$, i.e. ssi $1 > \gamma$. \square

exemple 7. L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x}$ est continue sur \mathbb{R}^+ , se primitive en $x \mapsto -e^{-x}$, donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ converge, et de même $\int_{-\infty}^0 e^t dt$ converge.

Proposition 11 (logarithme).

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et vaut $\int_0^1 \ln(t) dt = -1$.

démonstration :

L'intégrale généralisée (impropre en 0) $\int_0^1 \ln(t) dt$ converge et vaut -1 , car $f : x \mapsto \ln x$ a pour primitive sur $]0, 1]$ la fonction $F : x \mapsto x \ln(x) - x$ et par croissance comparées $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$. \square

Remarque 5. Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .

Proposition 12 (C.N.S de convergence pour une fonction positive).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Soit $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ à valeurs positives, alors l'intégrale généralisée $\int_I f(t) dt$ converge si et seulement

si $\sup_{(x,y) \in I^2} \int_x^y f(t) dt$ est fini.

démonstration : Par positivité de l'intégrale, $F : y \mapsto \int_a^y f(t) dt$ est croissante sur $I \cap [a, +\infty[$ et $G : x \mapsto \int_x^a f(t) dt$ est croissante sur $I \cap]-\infty, a]$, et à valeurs positives. Elle admet une limite ℓ finie en $+\infty$ si et seulement si elle est majorée, d'après le théorème de la limite monotone, vu en PCSI \square

III. Fonctions intégrables

III.1 Absolue convergence d'une intégrale

Définition 7 (Intégrale absolument convergente).

Soient I un intervalle (borné ou non) de bornes α et β , $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. On dit que l'intégrale de f sur I est **absolument convergente** si l'intégrale généralisée $\int_\alpha^\beta |f|$ converge.

Remarque 6. La réciproque est fautive : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ est convergente, et non absolument convergente (c.f; TD : suites adjacentes, ou IPP).

Proposition 13 (Convergence de l'intégrale généralisée d'une fonction intégrable).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

Si $\int_\alpha^\beta |f|$ converge, alors $\int_\alpha^\beta f$ converge.

i.e. : toute intégrale généralisée absolument convergente est convergente.

démonstration : cas $I = [\alpha, \beta[$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $f = f^+ - f^-$, où $f^+ : t \mapsto \max(f(t), 0)$ et $f^- : t \mapsto \max(-f(t), 0)$. On a pour tout $t : 0 \leq f^+(t) \leq |f(t)|$ et $0 \leq f^-(t) \leq |f(t)|$, donc par comparaison, $\int_\alpha^\beta f^+$ et $\int_\alpha^\beta f^-$ convergent, car les \int_α^y sont majorées par les $\int_\alpha^y |f(t)|$ donc par $\int_\alpha^\beta |f|$. Par linéarité de l'intégrale (sur les segments puis passage à la limite aux bornes impropres), $\int_\alpha^\beta (f^+ - f^-)$ converge. \square

III.2 Intégrabilité

Définition 8 (intégrabilité sur un intervalle).

Une fonction f continue par morceaux sur un intervalle I est dite **intégrable** sur I si l'intégrale de f sur I est **absolument convergente**.

Si tel est le cas, on note $\int_I f$ ou $\int_I f(t) dt$ la valeur de cette intégrale généralisée convergente.

Définition 9 (intégrabilité en une borne).

Soient I un intervalle réel et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ une borne ouverte de I . Une fonction $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ est dite **intégrable** en β s'il existe $a \in I$ tel que $\int_a^\beta |f(t)| dt$ converge.

Remarque 7. Pour une fonction à valeurs réelles positives, l'intégrabilité sur I est équivalent à la convergence de l'intégrale généralisée $\int_I f$.

III.3 Fonctions de référence

$t \mapsto \ln t$ est intégrable sur $]0, 1]$

$t \mapsto e^{-\beta t}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\beta > 0$.

$t \mapsto t^{-\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ ssi $\gamma > 1$.

$t \mapsto t^{-\alpha}$ est intégrable en 0 ssi $\alpha < 1$.

$t \mapsto \frac{1}{|t-a|^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$.

III.4 Théorèmes de comparaison**Théorème 14** (de comparaison).

Soient $I = [\alpha, \beta[$ un intervalle réel avec $\beta = \sup(I)$, $f, g \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$.

1. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t \rightarrow \beta}{=} O(g(t))$, alors f est intégrable en β .
2. Si g est intégrable en β et si : $f(t) \underset{t \rightarrow \beta}{=} o(g(t))$, alors f est intégrable en β .
3. Si $f(t) \underset{t \rightarrow \beta^-}{\sim} g(t)$, f est intégrable en β si et seulement si g est intégrable en β .

démonstration : 1) On utilise le critère d'intégrabilité pour des fonctions positives.

Il existe t_0 et $K > 0$ tels que : $\forall t \geq t_0, |f(t)| \leq K|g(t)|$. 2) corollaire 3) On se ramène au cas précédent en majorant $|f(t)|$ par $2K|g(t)|$, pour tout t dans l'intervalle $[t_0, \beta[$

Remarque 8. On dispose des mêmes propriétés au voisinage de $\alpha = \inf(I)$ dans le cas où $I =]\alpha, \beta]$.

exemple 8. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} , et $f(x) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$ et $f(x) \underset{t \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

IV. Espace des fonctions intégrables

IV.1 Notations

Définition 10 (fonction intégrable).

On note $L^1(I, \mathbb{K}) = \left\{ f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K}); \int_I |f| \text{ converge} \right\}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux intégrables sur I .

Proposition 15 (Inégalité triangulaire).

Soit I un intervalle, f et g deux fonctions intégrables sur I sont absolument convergentes.

Alors c'est aussi le cas pour $f + g$ et $\int_I |f + g| \leq \int_I |f| + \int_I |g|$

dém : on a même pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, f, g intégrables sur I , par inégalité triangulaire $|\lambda f + \mu g| \leq |\lambda| |f| + |\mu| |g|$ et par la CNS de convergence des intégrales généralisées de fonctions positives, $\int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |\lambda f(t) + \mu g(t)| dt$ converge,

car majorée par la constante $|\lambda| \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |f(t)| dt + |\mu| \int_{\inf(I)}^{\sup(I)} |g(t)| dt$. \square

Proposition 16.

$(L^1(I, \mathbb{K}), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

dém : cf calcul précédent et le fait que la fonction nulle est cpm intégrable. \square

IV.2 CS nullité fonction intégrable continue

Théorème 17 (CNS nullité).

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si $\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

IV.3 CNS intégrabilité des fonctions positives

Proposition 18 (C.N.S d'intégrabilité pour une fonction c.p.m. positive).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Etant donnée $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ à **valeurs positives**, alors l'intégrale généralisée $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt$ converge si et seulement s'il existe $M \geq 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, x < y, \int_x^y f(t) dt \leq M.$$

idée démonstration : analogue

V. Propriétés usuelles

V.1 Linéarité

Proposition 19 (Linéarité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Si f et g sont continues par morceaux et si $\int_{\alpha}^{\beta} f$ et $\int_{\alpha}^{\beta} g$ convergent, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f + \mu g$ converge et $\int_{\alpha}^{\beta} (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$

démonstration : linéarité du passage à la limite. \square

V.2 Positivité, croissance

Proposition 20 (positivité).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Soit f appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction positive dont l'intégrale généralisée converge.

Alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \geq 0$.

Proposition 21 (croissance).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$ et $\beta = \sup(I)$.

Soient f, g appartenant à $\mathcal{CM}(I, \mathbb{R})$ une fonction

Soient $a < b$ et f, g appartenant à $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ dont les intégrales généralisées convergent.

Si $f \leq g$, alors $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$,

i.e. (f, g intégrables et $\forall t \in I, f(t) \leq g(t)$) $\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt$

V.3 Relation de Chasles

Proposition 22 (relation de Chasles).

Soit I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, $c \in]\alpha, \beta[$, et $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_{\alpha}^{\beta} f$ converge.

Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = \int_{\alpha}^c f(t) dt + \int_c^{\beta} f(t) dt$$

Application : $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+1} f = \int_0^{+\infty} f$ pour f intégrable.

V.4 IPP généralisée

Proposition 23 (Intégration par parties).

Soient I un intervalle, $\alpha = \inf(I)$, $\beta = \sup(I)$, et u, v de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})$ telles que $\lim_{\alpha} uv$ et $\lim_{\beta} uv$ existent et sont finies.

Alors $\int_{\alpha}^{\beta} u'v$ et $\int_{\alpha}^{\beta} uv'$ sont de même nature et en cas de convergence (simultanée), on a :

$$\int_{\alpha}^{\beta} u'(t)v(t) dt = \lim_{x \rightarrow \alpha^+, y \rightarrow \beta^-} [u(t)v(t)]_{t=x}^y - \int_{\alpha}^{\beta} u(t)v'(t) dt$$

démonstration : Sur un segment $[u(t)v(t)]_{t=x}^y = \int_x^y (u(t)v(t))' dt = \int_x^y u'(t)v(t) + u(t)v'(t) dt$, puis limite. \square

Notation 2. $[u(t)v(t)]_{t=a}^b$ est parfois noté $[uv]_a^b$

V.5 CDV généralisé

Théorème 24 (changement de variables bijectif).

Soient $I =]a, b[$ et $J =]\alpha, \beta[$ deux intervalles réels, $f \in \mathcal{CM}(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1(J, I)$ une bijection strictement croissante.

Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ converge.

Si tel est le cas, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

démonstration :

On se place dans le cas f continue; le cas continue par morceaux se traiterait à l'aide d'une subdivision en intervalles de continuité.

Soit F une primitive de f sur I , et $G = F \circ \varphi$.

G est dérivable sur $J =]\alpha, \beta[$ et pour tout $u \in J$, $G'(u) = \varphi'(u)F'(\varphi(u)) = \varphi'(u)f(\varphi(u))$, donc G est la primitive de $\varphi' \times f \circ \varphi$ qui vaut $F(\varphi(\alpha))$ en α .

Ainsi, pour tout β ,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) dt \stackrel{\text{th fond. pour } F}{=} F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) \stackrel{\text{def. de } G}{=} G(\beta) - G(\alpha) \stackrel{\text{th fond. pour } G}{=} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi'(u) f(\varphi(u)) du.$$

Comme φ^{-1} est une bijection de I sur J , en posant $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ et $\beta = \varphi^{-1}(b)$, on conclut. \square

Remarque 9. c'est cette dernière version qui est souvent utile en pratique.

exemple 9. en posant $\varphi : u \mapsto e^u$, on a $\varphi^{-1} : t \mapsto \ln t$ et :

$$\int_1^x \frac{1}{t\sqrt{1-\ln^2 t}} dt = \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \text{Arcsin}(\ln x) - \text{Arcsin}(0) = \text{Arcsin}(\ln x).$$

exemple 10. *changement de variable affine*

lorsque $J = [0, 1]$, $I = [a, b]$ et $\varphi : J \rightarrow I$, $u \mapsto (1 - u)a + ub$, on obtient : $\int_a^b f(t)dt = \int_0^1 (b - a)f((1 - u)a + ub)du$

lorsque $J = [-1, 1]$, $I = [a, b]$ et $\varphi : J \rightarrow I$, $u \mapsto \frac{a+b}{2} + u\frac{b-a}{2}$, on obtient : $\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 \frac{b-a}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + u\frac{b-a}{2}\right) du$

exemple 11. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge, car $f : x \mapsto e^{-x^2}$ est continue sur \mathbb{R} , et $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc f est intégrable en $+\infty$
et $f(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc est intégrable en $-\infty$, par comp. avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$.

NOUVEAU Programme 2022-23

V.6 Intégration sur un intervalle quelconque

Cette section vise les objectifs suivants :

- étendre la notion d'intégrale étudiée en première année à des fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque par le biais des intégrales généralisées;
- définir, dans le cadre des fonctions continues par morceaux, la notion de fonction intégrable;
- compléter la section dédiée aux suites et aux séries de fonctions par les théorèmes de convergence dominée et d'intégration terme à terme;
- étudier les fonctions définies par des intégrales dépendant d'un paramètre.

On évite tout excès de rigueur dans la rédaction. Ainsi, dans les calculs concrets mettant en jeu l'intégration par parties ou le changement de variable, on n'impose pas de rappeler les hypothèses de régularité des résultats utilisés. De même, dans l'application des théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale ou de régularité des intégrales à paramètre, on se limite à la vérification des hypothèses cruciales, sans insister sur la continuité par morceaux en la variable d'intégration.

Les fonctions considérées sont définies sur un intervalle de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{K} , ensemble des nombres réels ou des nombres complexes.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Fonctions continues par morceaux

Fonctions continues par morceaux sur un segment, sur un intervalle de \mathbb{R} .

Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux.

Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.

b) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ est dite convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.

Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de \mathbb{R} .

Propriétés des intégrales généralisées :
linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.

Intégration par parties sur un intervalle quelconque :

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Changement de variable :

si $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ est une bijection strictement croissante de classe \mathcal{C}^1 , et si f est continue sur $]a, b[$, alors

$\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(u) \varphi'(u) du$ sont de même nature, et égales en cas de convergence.

Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt.$

Intégrale convergente (resp. divergente) en b , en a .

La démonstration n'est pas exigible.

L'existence des limites finies du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature.

Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.

La démonstration n'est pas exigible.

Adaptation au cas où φ est strictement décroissante.

On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.

d)(partiel)

Intégrale absolument convergente.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire.

Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente.

Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Si f est continue, intégrable et positive sur I , et si

$\int_I f(t) dt = 0$, alors f est identiquement nulle.

Théorème de comparaison :

pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$:

– si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O(g(t))$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f .

– si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g .

L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.

Notations $\int_I f, \int_I f(t) dt.$

Pour $I = [a, b[$, (respectivement $]a, b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).

Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.

Le résultat s'applique en particulier si $f(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} o(g(t))$.

CONTENUS

Fonctions de référence :

pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

- intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
- étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

L'intégrabilité de $t \mapsto \ln t$ en 0 peut être directement utilisée.

Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Plus généralement, les étudiants doivent savoir que la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en a^+ (resp. en b^-) si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) l'est en 0^+ .