Méthodes à retenir :

— Pour justifier qu'une intégrale généralisée converge, commencer par mentionner la continuité ou continuité par morceaux de la fonction, puis examiner l'intégrabilité en les bornes impropres (infinies, ou ouvertes sans prolongement par continuité) par comparaison (via des équivalents ou des majorations de valeurs absolues) aux bornes ouvertes infinies ou finies de l'ensemble de continuité.

— Pour calculer la valeur d'une intégrale généralisée convergente : essayer avec les primitives usuelles, ou par changement de variables, ou par intégration par parties, ou plus tard à l'aide d'une interversion série-intégrale

— Il faut connaître la nature des intégrales de Riemann $\int_0^1 t^a \,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} t^b \,\mathrm{d}t$, et savoir écrire $\frac{1}{t^c} = t^{-c}$

I. Le coin des 3/2

Exercice 1 ✰

1. Etudier l'existence (c.à.d. la convergence de l'intégrale généralisée) de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$?
2. Après avoir remarqué que $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, en déduire la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 2 ✰ *Calculs usuels*

1. Après avoir remarqué que $\cos^2 t = \frac{\cos(2t)+1}{2}$, calculer $\int_0^{\pi/4} \cos^2 t \,\mathrm{d}t$
2. Après avoir remarqué que $\frac{t^2}{1+t^2} = 1 - \frac{1}{1+t^2}$, calculer $\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. En remarquant que $\sin(t) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$, proposez une primitive F de $f : t \longmapsto \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, puis calculer la valeur de $L = \int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 3 ✰

En remarquant que $f : t \mapsto \frac{(\ln t)^2}{t}$ est de la forme $u'(t)u(t)^2$, donner l'expression d'une primitive F de f sur $]0, +\infty[$, puis en déduire la nature (convergente ou divergente) de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 ✰ *Intégrales convergentes*

Après avoir déterminer l'ensemble de continuité de la fonction dont l'expression apparaît sous le signe intégral, justifier l'intégrabilité en les bornes ouvertes (finies ou infinies) de l'ensemble de continuité.

1. $I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-3/2}$ en $+\infty$*
2. $J = \int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-1/2}$ en 0*
3. $K = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{-\ln t}}\mathrm{d}t$; *indication : faire le changement de variable $t = 1-u$ et comparer à $\frac{1}{\sqrt{u}}$ pour $t \to 1$*

Exercice 5 ✰ *Intégrales divergentes*

Justifier que l'intégrale généralisée suivante est divergente :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à t^{-1} en $+\infty$*
2. $\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+2t}\mathrm{d}t$; *indication : minorer $\int_0^{Y} \frac{1+t}{1+2t}\mathrm{d}t$ par $\int_0^{Y} \frac{1}{2}\mathrm{d}t$*
3. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : découper en 1 via la relation de Chasles*

Exercice 6 ☆☆

Soit $f :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{2(1-\cos x)}{x^2+x^3}$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}_*^+$.
2. Donner un équivalent de f en 0. En déduire que f est intégrable en 0.
3. Dominer f en $+\infty$ par une fonction intégrable en $+\infty$.
4. Conclure que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$

Exercice 7 ☆☆

Pour $n\in\mathbb{N}$, justifier la convergence et calculer

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$$

Exercice 8 ☆☆

En remarquant que $r : t \mapsto \cos(t)\mathrm{e}^{-t}$ est la partie réelle d'une fonction à valeurs complexes c dont on sait calculer une primitive C sur $\mathbb{R}$, en déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

II. Exercices

Exercice 9 ☆☆

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \le 0 \\ t^{-1/2} & \text{si} \quad t \in]0,1[\\ t^{-2} & \text{si} \quad t\in[1,+\infty[\end{cases}$

1. Justifier que h est continue (donc par morceaux) sur $]0,+\infty[$
2. Justifier que h n'est pas continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
3. l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\ \mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

Exercice 10 ☆

Soit $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Après avoir étudier la continuité de f sur $[0,1[$, justifier l'existence puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 11 ☆ *Continuité et théorèmes de comparaisons aux bornes impropres*

Après avoir déterminer l'ensemble de continuité de la fonction dont l'expression apparaît sous le signe intégral, puis les bornes impropres, justifier l'existence des intégrales généralisées suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-3/2}$ en $+\infty$*
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$; *indication : comparer à $t^{-1/2}$ en 0*

Exercice 12 ☆

Justifier que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t$ converge, à l'aide d'une fonction continue ou continue par morceaux judicieusement choisie.

Exercice 13 ☆☆

Etudier l'intégrabilité sur $I=[1,+\infty[$ de :

a) $f : x \longmapsto \dfrac{\sin x}{x\sqrt{x}}$;

b) $g : x \longmapsto \ln(e^{\beta x}+x)$, selon les valeurs de β ;

Exercice 14 ☆☆

A l'aide d'une intégration par parties, justifiez que pour $a>1$, l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^a}\ \mathrm{d}t$ converge.

Exercice 15 *Intégrales généralisées convergentes*

Soit $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{-\ln t}}\mathrm{d}t$;

A l'aide du changement de variable $t = 1-u$, montrer que K converge, en comparant à $u \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ lorsque $t\to 1$.

Exercice 16 ☆☆

A l'aide du changement de variable affine $u = 1-t$, étudier la nature de $I = \displaystyle\int_0^1 \ln(1-t)\mathrm{d}t$ et de

$$J = \int_0^1 \frac{1}{(t-1)^2}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 17 ✫✫✫ *CDV*

On considère l'intégrale généralisée $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$

1. Quelle est la nature de I ?
2. Etudier la fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ sur $[1, +\infty[$.
3. Montrer que $I = \displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2-1}$, à l'aide du changement de variables $u = \sqrt{1+x^2}$.
4. En déduire la valeur de I, en remarquant que $\dfrac{1}{u^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{u-1} - \dfrac{1}{u+1}\right)$

Exercice 18 ✫✫*la fonction Gamma*

Déterminer l'ensemble de définition de $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 19 ✫✫✫

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et intégrable.

1. Justifier que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. On suppose en outre que f est monotone. Justifier la convergence de la suite $(S_N)_{N\geq 0}$ définie par :
$S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \int_n^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$, pour $N \in \mathbb{N}$, puis comparer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}^{+} f$ et $\lim S_N$.

III. Exercices avancés

Exercice 20 ✫✫✫ *Intégrales « de Bertrand »(HP)*

Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, et $f_{\alpha,\beta} : x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha(\ln x)^\beta}$.

1. Pour $\alpha > 1$, remarquer que $1 < \dfrac{1+\alpha}{2} < \alpha$, puis justifier que $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}\right)$. Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$
2. Pour $\alpha < 1$, remarquer que $1 > \dfrac{1+\alpha}{2} > \alpha$, puis justifier qu'en $+\infty$, $f(x) \geq \dfrac{1}{x^{\frac{1+\alpha}{2}}}$.
Conclure que $f_{\alpha,\beta}$ n'est pas intégrable sur $[2, +\infty[$
3. Pour $\alpha = 1$, montrer que $f_{1,\beta}$ est intégrable sur $[2, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$. *(on pourra faire un changement de variable)*

Exercice 21 ✫✫✫ *intégrale "semi-convergente"*

1. Montrer que : $\forall t \in [0, \frac{\pi}{2}],\ \frac{2}{\pi}t \leq \sin(t) \leq t$.
2. On veut montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.
On pose alors, pour tout $t > 0$, $\varphi(t) = \dfrac{\sin(t)}{t}$.

2.1. Vérifier que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0, 1]$.

2.2. Pour tout $x > 1$, on définit
$\psi : x \mapsto \psi(x) = \displaystyle\int_1^x \varphi(t)\, dt.$
Montrer que l'on a :
$\forall x > 1,\ \psi(x) = \cos(1) - \dfrac{\cos(x)}{x} - \displaystyle\int_1^x \frac{\cos(t)}{t^2}\, dt.$

2.3. Prouver que $\psi(x)$ tend vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

2.4. Déduire de ces résultat que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$ est convergente.

Exercice 22 ✰✰✰

Soit $E = \left\{ f : I \to \mathbb{C};\ f\text{continue et } \displaystyle\int_I f^2 \text{converge} \right\}$

Vérifier que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_I f(t)g(t)\mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.

IV. la tête dans les ⋆

Exercice 23 ✰✰✰ *intégrale "semi-convergente"*

Montrer que les suites $(u_N) = \left(\displaystyle\int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)$ et $(v_N) = \left(\displaystyle\int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, établir les inégalités

$u_N \leq \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \leq v_N$ pour tout $x \in [2N\pi, (2N+1)\pi[$ et

$u_{N+1} \leq \displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \leq v_N$ pour tout $x \in [(2N+1)\pi, (2N+2)\pi[$.

En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ converge (semi-convergence).

Exercice 24 ✰✰✰

Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\mathrm{d}x$.

Exercice 25 ✰✰✰✰ *Centrale PC 2016*

Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et décroissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f$ converge si et seulement si la suite (S_n) converge, auquel cas $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 f$

Exercice 26 ✰✰✰✰

Soit f de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} f' = 0 = \lim_{-\infty} f'$, prouver que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ en utilisant une intégration par parties.

Exercice 27 ✰✰✰✰ *intégrale "semi-convergente"*

Soit $h : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } E(x) \text{ est pair} \\ -\dfrac{1}{(x-1)} & \text{si } E(x) \text{ est impair} \end{cases}$.

a) Montrer que :
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_{2n}^{2n+2} |h(x)|\,\mathrm{d}x = 2\int_{2n}^{2n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

b) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$,
$\displaystyle\int_2^N |h(x)|\mathrm{d}x \geq \int_2^N \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

En déduire que h n'est pas (absolument) intégrable sur I.

c) Montrer que : $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_2^N h(x)\,\mathrm{d}x = 0$

d) En encadrant $B/2$, montrer que :
$\forall B > 2,\ \left|\displaystyle\int_0^B h(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{2E(B/2)} h(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{2E(B/2)}.$

e) Conclure que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente, sans que h soit intégrable sur $[2, +\infty[$.

V. Exercices corrigés à étudier

Exercice 28 ☆☆☆ *Intégrales « de Bertrand » »*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $I_{\alpha,\beta} = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta} \mathrm{d}t$

1. Justifier que $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ est continue sur $J = [2, +\infty[$. En déduire que la convergence de $I_{\alpha,\beta}$ équivaut à l'intégrabilité en $+\infty$ de f.
2. étude d'intégrabilité en $+\infty$:
   (a) Lorsque $\alpha < 0$, justifier que $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ et en déduire que f n'est pas intégrable en $+\infty$, puis que $I_{\alpha,\beta}$ diverge.
   (b) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$ vérifie $\alpha > \gamma > 1$.
   Justifier ensuite que $\dfrac{f(t)}{t^{-\gamma}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc que $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-\gamma})$ puis que f est intégrable en $+\infty$, puis que $I_{\alpha,\beta}$ converge.
   (c) Lorsque $\alpha = 1$, Effectuez le changement de variables généralisé $\ln t = u$ et en déduire que $I_{\alpha,\beta}$ a la même nature que $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ En déduire que f est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\beta > 1$, c'est à dire ssi $I_{\alpha,\beta}$ converge.
   (d) Lorsque $\alpha \in]0, 1[$, montrer que $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$ vérifie $1 > \gamma > \alpha$.
   Justifier ensuite que $\dfrac{f(t)}{t^{-\gamma}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$, donc qu'il existe $t_0 \geq 2$ tel que :
   $$\forall t \geq t_0,\ f(t) \geq \frac{1}{t^\gamma},$$
   puis que f n'est pas intégrable en $+\infty$, puis que $I_{\alpha,\beta}$ diverge.

Correction :

1. *Pour tout $t \geq 2$, $t \ln t > 0$, donc f est continue sur $J = [2, +\infty[$ comme inverse d'une fonction continue dont le dénominateur ne s'annule pas.*
   Comme f est positive, la vonvergence de $\displaystyle\int_J f(t)\mathrm{d}t$ est alors équivalente à l'intégrabilité en $+\infty$ de f.
2. (a) *Par croissances comparées, $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$.*
   Ainsi il existe $t_0 \geq 2$ telle que $\forall t \geq t_0$, $f(t) \geq 1$ et comme $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} 1 \,\mathrm{d}t$ diverge, par comparaison, f n'est pas intégrable en $+\infty$, donc $I_{\alpha,\beta}$ diverge.
   (b) *Pour $\alpha > 1$ fixé, on a $2\alpha > 1 + \alpha > 2$, donc $\alpha > \gamma > 1$.*
   $$\frac{f(t)}{t^{-\gamma}} = \frac{t^{-\alpha} t^\gamma}{(\ln t)^\beta} = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0, \text{ par croissances comparées et car } \frac{1-\alpha}{2} < 0.$$
   Donc $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(t^{-\gamma})$

Comme $t \longmapsto t^{-\gamma}$ est intégrable en $+\infty$ car l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^{-\gamma}\,\mathrm{d}t$ converge puisque $\gamma > 1$, Ainis par comparaison, f est intégrable en $+\infty$, et $I_{\alpha,\beta}$ converge.

(c) *Lorsque $\alpha = 1$.*

$\varphi t \mapsto \ln t$ réalise une bijection monotone et de classe $\mathcal{C}^1$ de $J = [2, +\infty[$ vers $K = [\ln 2, +\infty[$.

Par changement de variables généralisé $u = \varphi(t)$ comme $\dfrac{\mathrm{d}t}{t} = \mathrm{d}u$,

on en déduit que $I_{\alpha,\beta}$ a la même nature que $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$, et même valeur en cas de convergence.

Comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^\beta}$ cnoverge ssi $\beta > 1$, on en déduit que f est intégrable en $+\infty$ et $I_{\alpha,\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

(d) *Pour $\alpha \in [0, 1[$ fixé, on a $2 > 1 + \alpha > 2\alpha$, donc $1 > \alpha > \gamma$.*

$$\frac{f(t)}{t^{-\gamma}} = \frac{t^{-\alpha}t^{\gamma}}{(\ln t)^\beta} = \frac{t^{\frac{1-\alpha}{2}}}{(\ln t)^\beta} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$$ *, par croissances comparées et car $\dfrac{1-\alpha}{2} > 0$.*

Ainsi il existe $t_0 \geq 2$ telle que $\forall t \geq t_0$, $f(t) \geq t^{-\gamma}$ et comme $\displaystyle\int_{t_0}^{+\infty} t^{-\gamma}\,\mathrm{d}t$ diverge car $\gamma \leq 1$, par comparaison, f n'est pas intégrable en $+\infty$, donc $I_{\alpha,\beta}$ diverge.

Questions sur le corrigé :

1) Rappeler la valeur de $\ln 1$ et la monotonie de $\ln$.
2) Rappeler la nature des intégrales de Riemann au voisinage de $+\infty$.
3) Représenter l'ensemble $\Delta = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 ; I_{\alpha,\beta}\ \mathrm{converge}\}$

Notes

[1] correction : $Arctan$ et linéarité

[4] correction : Comparaison

[10] correction : on primitive en Arcsin

[11] correction : il ne peut y avoir continuité par morceaux sur $[-1, 1]$, car toute subdivision en 0 donne une fonction sans prolongement par continuité en 0^+.

[12] correction : prolongement par continuité ;

[23] correction : On va vérifier les hypothèses du théorème des suites adjacentes :

1. $\forall N \in \mathbb{N},\ u_N \leq v_N$
2. la limite suivante existe et est nulle : $\lim\limits_{N \to +\infty} v_N - u_N = 0$
3. la suite $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.
4. la suite $(v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Le théorème des suites adjacentes permettra alors d'en déduire que $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie ℓ.

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_N - u_N = \int_0^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \underset{Chasles}{=} \int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \geq 0$$

par positivité de l'intégrale, et car pour tout $t \in [2N\pi, 2N\pi + \pi]$, $\dfrac{\sin t}{t} \geq 0$.

d'où 1.

$$|v_N - u_N| = \left|\int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \underset{propr.\ int.}{\leq} \left|\int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right| \underset{croissance}{\leq} \frac{1}{2N\pi + \pi}\int_{2N\pi}^{(2N+1)\pi} |\sin(t)|\,\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{2N\pi + \pi}$$

car pour tout $t \in [2N\pi, 2N\pi + \pi]$, $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leq \dfrac{|\sin(t)|}{2N\pi + \pi}$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{N \to +\infty} |u_N - v_N| = 0$, d'où 4.

$$u_{N+1} - u_N = \int_0^{(2N+2)\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t - \int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \underset{Chasles}{=} \int_{2N\pi}^{2N\pi+2\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \underset{Chasles}{=} \int_{2N\pi}^{2N\pi+\pi} \frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t + \int_{2N\pi+\pi}^{2N\pi+2\pi} \frac{-|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$$

Or pour tout $t \in [2N\pi, 2N\pi + \pi]$, $\dfrac{|\sin t|}{t} \geq \dfrac{|\sin t|}{2N\pi + \pi}$, et pour tout $t \in [2N + \pi\pi, 2N\pi + 2\pi]$, $\dfrac{-|\sin t|}{t} \geq \dfrac{-|\sin t|}{2N\pi + \pi}$

donc par croissance et linéarité de l'intégrale,
$u_{N+1} - u_N \geq \dfrac{1}{2N\pi + \pi}\left(\displaystyle\int_{2N\pi}^{2N\pi+\pi} |\sin t|\mathrm{d}t - \int_{2N\pi+\pi}^{2N\pi+2\pi} |\sin t|\mathrm{d}t\right) \underset{periodicite}{=} 0$, d'où 3.

On démontrerait de même 4.

Conclusion : les suites $(u_N)_{N \in \mathbb{N}}$ et $(v_N)_{N \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite finie ℓ.

Mais alors pour $y > 0$, on a :

• Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que tel que $2N\pi \leq y \leq 2N\pi + \pi$, alors $\displaystyle\int_0^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = \int_0^{2N\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t + \int_{2N\pi}^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t = u_N + \int_{2N\pi}^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \geq u_N$, par positivité de l'intégrale, car pour tout $t \in [2N\pi, 2N\pi + \pi]$, $\dfrac{\sin t}{t} \geq 0$.

Et $u_{N+1} - \displaystyle\int_0^y \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \underset{Chasles}{=} \int_y^{2N\pi+\pi} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t \geq 0$, par positivité de l'intégrale.

Donc $u_N \leq \int_0^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq u_{N+1}$.

• Si $N \in \mathbb{N}$ est tel que tel que $2N\pi + \pi \leq y \leq 2N\pi + 2\pi$, on montre de même que $v_{N+1} \leq \int_0^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t \leq v_N$

Dans tous les cas, par théorème des gendarmes, on obtient $\boxed{\lim_{y \to +\infty} \int_0^y \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t = \ell \in \mathbb{R}}$

[24] correction :

$I = \int_0^\pi \ln(2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}) \mathrm{d}x = \pi \ln 2 + \int_0^\pi \ln(\sin \frac{x}{2}) \mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln(\cos \frac{x}{2}) \mathrm{d}x = \pi \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \mathrm{d}x + 2 \int_0^{\pi/2} \ln(\cos x) \mathrm{d}x$

Donc $I = \pi \ln 2 + 2I$ car $2 \int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) \mathrm{d}x = \int_0^\pi \ln(\sin x) \mathrm{d}x$ via le cdv $u = \pi - x$ sur $[\pi/2, \pi]$ après découpage, et via le cdv $\pi/2 - x = s$ on a $\int_0^\pi \ln(\sin x) \mathrm{d}x + \int_0^\pi \ln(\cos x) \mathrm{d}x$ D'où $I = -\pi \ln 2$

[25] correction :

Pour $k \geq 2$ et $t \in \left] \frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right]$, on a $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq f(t) \left(\frac{k-1}{n}\right)$, donc $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) \mathrm{d}t \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)$