

# Table des matières

<b>I. Rappels de PCSI sur les espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
I.1 Rappels de PCSI : sous-espaces vectoriels . . . . .	2
I.2 Rappels de PCSI : somme de deux s.-e.v. . . . .	2
I.3 Rappels de PCSI : sommes directes et supplémentaires . . . . .	3
<b>II. Sommes de plusieurs espaces vectoriels</b>	<b>4</b>
II.1 Sommes sous-espaces vectoriels . . . . .	4
II.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels . . . . .	4
II.3 Sommes directes et bases adaptées . . . . .	5
<b>III. Matrices par blocs, sous-espaces stables</b>	<b>7</b>
III.1 Sous-espaces-stables par un endomorphisme . . . . .	7
III.2 Matrices par blocs . . . . .	8
<b>IV. Déterminants</b>	<b>9</b>
IV.1 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $2 \times 2$ . . . . .	9
IV.2 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $n \times n$ . . . . .	9
IV.3 Rappel : déterminant d'un produit . . . . .	10
IV.4 Déterminants triangulaires par blocs . . . . .	11
IV.5 Matrices semblables . . . . .	11
<b>V. Trace</b>	<b>12</b>
V.1 Définition . . . . .	12
V.2 Propriétés . . . . .	12
<b>VI. Propriétés avancées</b>	<b>14</b>
VI.1 Produit fini d'espaces vectoriels . . . . .	14
VI.2 Algèbre linéaire . . . . .	15
2.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices . . . . .	15

## Pré-requis

Espaces vectoriels usuels  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ,  $\mathbb{R}_N[X]$ ,  $\mathbb{R}[X]$ ,  $\mathbb{C}[X]$ ,  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ . Familles libres, liées. Bases en dimension finie. Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Supplémentaires.  
Applications linéaires, noyau, image.

## Objectifs

Généraliser les décompositions uniques dans un espace vectoriel de dimension finie selon une somme directe de deux ou plus sous-espaces vectoriels. Notion de sous-espaces stables et propriétés matricielles dans une base adaptée.

Déterminant et calculs par blocs, Trace.

# I. Rappels de PCSI sur les espaces vectoriels

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

## I.1 Rappels de PCSI : sous-espaces vectoriels

### Définition 1.

Un ensemble  $E$  est dit  $\mathbb{K}$ -**espace vectoriel**, pour les lois d'addition (interne)  $+$  et de produit (externe)  $\cdot$  si :

- $E$  **non vide**, et est stable pour la loi  $+$ , qui est commutative et associative, admet un élément neutre  $0_E$ , et tout élément  $x$  de  $E$  admet un opposé  $-x$  tel que  $x + (-x) = 0_E$
- $E$  est stable par multiplication à gauche par un scalaire par la loi  $\cdot$ , qui est distributive par rapport à l'addition, associative par rapport à la multiplication dans  $\mathbb{K}$ , admet pour élément neutre multiplicatif  $1_{\mathbb{K}}$

**exemple 1.**  $\mathbb{R}[X] = \left\{ \sum_{i=0}^d a_i X^i; d \in \mathbb{N}, (a_0, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \right\}$

**exemple 2.**  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \left\{ (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}; (a_{i,j})_{(i,j) \in [1,n]^2} \in \mathbb{R}^{n^2} \right\}$ .

*Remarque 1.* En pratique, pour montrer qu'un ensemble  $F$  est un espace vectoriel, on montre qu'il est un sous-espace vectoriel (s.e.v.) d'un espace vectoriel le contenant :

- **non vide** et contenu dans un espace vectoriel de référence ( $\mathbb{R}^n, \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}[X] \dots$ )
- **stable par combinaison linéaire** (i.e.  $\forall (x, y) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda x + y \in F$ )

**exemple 3.**  $\mathbb{R}_2[X] = \left\{ \sum_{i=0}^2 a_i X^i; (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 \right\} \subset \mathbb{R}[X]$

**exemple 4.**  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{ S \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); S^T = S \} \subset \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ .

## I.2 Rappels de PCSI : somme de deux s.-e.v.

### Définition 2.

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $F, G$  deux s.-e.v. de  $E$ . On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels  $F$  et  $G$  le  $\mathbb{R}$ -e.v. noté  $F + G$  défini par :

$$F + G = \{ f + g; \forall i \in [1, s], f \in F, g \in G \}$$

**exemple 5.**  $\mathbb{R}_1[X] = \{ a_0 + a_1 X; (a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2 \} = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(1) + \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X)$

**exemple 6.**  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) + \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ .

### I.3 Rappels de PCSI : sommes directes et supplémentaires

#### Définition 3 (Sous-espaces supplémentaires).

Deux sous-espaces vectoriels  $F$  et  $G$  d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$  sont dits **supplémentaires** si :  $E = F \oplus G$   
i.e. si :  $\forall x \in E, \exists!(f, g) \in F \times G; x = f + g$

#### Définition 4 (Somme directe).

Soient  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et  $F, G$  deux s.e.v. de  $E$ .

On dit que la somme  $F + G$  de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :

$\forall (f, g) \in F \times G, (0_E = f + g \Rightarrow, f = g = 0_E)$ .

Si tel est le cas, on note

$$F + G = F \oplus G$$

Remarque 2. Pour une somme directe  $F \oplus G$  de s.e.v. de  $E$ , on a toujours  $F \oplus G \subset E$

#### Proposition 1 (C.N.S. de décomposition en somme directe).

Soient  $F$  et  $G$  sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

i)  $E = F \oplus G$

ii)  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $E = F + G$

démonstration : • Supposons i).

pour  $x \in F \cap G$ , on a  $0_E = \underbrace{x}_{\in F} + \underbrace{(-x)}_{\in G} = \underbrace{0}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}$ , donc par unicité de la décomposition,  $0 = x$  (et  $0 = -x$ ),

donc  $F \cap G \subset \{0_E\}$ . L'autre inclusion est toujours vraie pour des s.-e.v. .

• Supposons ii).

l'existence de décomposition dans  $F + G$  est automatique. Pour  $f_1, f_2 \in F$  et  $g_1, g_2 \in G$  tels que  $f_1 + g_1 + f_2 + g_2$ , on a  $f_1 - f_2 = g_2 - g_1 \in F \cap G$ , donc  $f_1 - f_2 = 0_E = g_2 - g_1$ , d'où l'unicité de la décomposition dans  $F + G$  : ainsi  $F + G = F \oplus G$ .

□

**exemple 7.**  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{I} \oplus \mathcal{P}$ , avec  $\mathcal{I} = \{f; \forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)\}$  et  $\mathcal{P} = \{g; \forall x \in \mathbb{R}, g(-x) = g(x)\}$

**exemple 8.**  $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ , avec  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{M; M^T = M\}$  et  $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{M; M^T = -M\}$

## II. Sommes de plusieurs espaces vectoriels

### II.1 Sommes sous-espaces vectoriels

**Définition 5.**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_s$  des s-e.v. de  $E$ . On appelle **somme** des sous-espaces-vectoriels  $E_1, \dots, E_s$  le  $\mathbb{K}$ -e.v. noté  $\sum_{i=1}^s E_i$  défini par :

$$\sum_{i=1}^s E_i = \{x_1 + x_2 + \dots + x_s; \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, x_i \in E_i\}$$

**exemple 9.**  $\mathbb{R}_4[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4; (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5\} = \sum_{i=0}^4 \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$

**Proposition 2.**

Pour  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_s$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ ,  $\sum_{i=1}^d E_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

démonstration : calcul direct pour  $x = \sum_{i=1}^s x_i, y = \sum_{i=1}^s y_i$  et  $\lambda$ , on a  $x + \lambda y = \sum_{i=1}^s (x_i + \lambda y_i)$ .  $\square$

Remarque 3. Dans le cas de deux sous-espaces vectoriels, on note aussi  $E_1 + E_2$  au lieu de  $\sum_{i=1}^2 E_i$ .

### II.2 Sommes directes de sous-espaces vectoriels

**Définition 6 (Somme directe).**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_s$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que la somme  $\sum_{i=1}^s E_i$  de sous-espaces-vectoriels est une **somme directe** si :

$$\forall (x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^s E_i, \left( 0_E = \sum_{i=1}^s x_i \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1, s \rrbracket, x_i = 0_E \right).$$

Si tel est le cas, on note

$$\sum_{i=1}^s E_i = \bigoplus_{i=1}^s E_i$$

**Définition 7** (Décomposition en somme directe).

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_s$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
On dit que  $E$  est en **somme directe** de  $E_1, \dots, E_s$  si :

$$\forall x \in E, \exists!(x_i)_{1 \leq i \leq s} \in \prod_{i=1}^s E_i; x = \sum_{i=1}^s x_i$$

Si tel est le cas, on note  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$

**exemple 10.**  $\mathbb{R}_4[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + a_4X^4; (a_0, \dots, a_4) \in \mathbb{R}^5\} = \bigoplus_{i=0}^4 \text{Vect}_{\mathbb{R}}(X^i)$   
 $= \mathbb{R}_1[X] \oplus \{(X^2 - 3X + 1)(a_0 + a_1X + a_2X^2); (a_0, \dots, a_2) \in \mathbb{R}^3\}$

## II.3 Sommes directes et bases adaptées

**Définition 8** (Base adaptée à une somme directe).

Etant donnée  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $s \in \mathbb{N}^*$  et  $E_1, \dots, E_s$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimensions respectives  $(d_i)_{1 \leq i \leq s}$  tels que  $E = \bigoplus_{i=1}^s E_i$ . On dit qu'une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  est une **base adaptée** à cette somme directe si ses éléments sont dans cet ordre de la forme  $((e_{1,1}, \dots, e_{1,d_1}), \dots, (e_{s,1}, \dots, e_{s,d_s}))$ , avec pour tout  $i \in \llbracket 1, s \rrbracket$ ,  $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,d_i})$  base de  $E_i$ .

**exemple 11.**  $(1, X, X^2, X^3)$  est une base de  $\mathbb{R}_3[X]$  adaptée à la somme directe  $\mathbb{R}_3[X] = \bigoplus_{i=0}^3 \text{Vect}(X^i)$ .

**exemple 12.**  $(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$ ,  
adaptée à la somme directe  $\mathbb{R}_n[X] = \bigoplus_{i=0}^n \text{Vect}((X - a)^i)$ .

**Proposition 3.**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -e.v. de dimension **finie**,  $n \in \mathbb{N}$ , et  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  tels que

$$\sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i. \text{ Alors } \dim \left( \bigoplus_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim(F_i) \leq \dim(E).$$

*démonstration :*

Pour tout  $i$ , on note  $j_i = \dim(E_i)$ ,  $M = \sum_{i=1}^n j_i$ , et on se donne  $\mathcal{B}_i = (e_{i,1}, \dots, e_{i,j_i})$  une base de  $E_i$ . Il nous suffit de

montrer que la famille  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$  de  $M$  vecteurs de  $E$  est une base de  $E$ .

• **généralité** : soit  $x \in E$ . Comme  $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$ , il existe  $(x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \prod_{i=1}^n E_i$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n x_i$ . Et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , il existe  $(\lambda_{i,k})_{1 \leq k \leq j_i} \in \mathbb{K}^{j_i}$  tels que  $x_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$ . Donc  $x = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right)$ . Ce pour tout  $x$  appartenant à  $E$ , d'où  $E \subset \text{Vect}(\mathcal{B})$ .

• **liberté** : soit  $(\lambda_{i,k})_{1 \leq k \leq j_i, 1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^M$  un  $M$ -uplet de scalaires tel que  $\sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} \right) = 0_E$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , le vecteur  $v_i = \sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k}$  appartient à  $E_i$ , et comme la somme est directe, l'égalité  $\sum_{i=1}^n v_i = 0_E$  implique  $v_i = 0_{E_i} = 0_E$ , pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Mais alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\sum_{k=1}^{j_i} \lambda_{i,k} e_{i,k} = 0_{E_i}$ , et  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E_i$  donc est libre, donc  $\lambda_{i,k} = 0$  pour tout  $k \in \llbracket 1, j_i \rrbracket$ . Finalement,  $\forall 1 \leq k \leq j_i, 1 \leq i \leq n, \lambda_{i,k} = 0_{\mathbb{K}}$ , donc  $\mathcal{B}$  est libre.  $\square$

**Proposition 4 (CNS de somme directe).**

Etant donnés  $p$  sous-espaces vectoriels  $F_1, \dots, F_p$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ , on a :  $\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$

En outre, il y a égalité si et seulement si  $\sum_{i=1}^p F_i$  est directe.

démonstration :

posons  $F = \sum_{i=1}^n F_i$ .

En prenant des bases  $\mathcal{B}_i$  des  $F_i$ , pour  $i$  allant de 1 à  $s$ , on obtient que la famille  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$  est génératrice de  $F = \sum_{i=1}^s F_i$ , et possède  $\sum_{i=1}^s \dim(F_i)$  éléments, donc  $\dim \left( \sum_{i=1}^s F_i \right) \leq \sum_{i=1}^s \dim(F_i)$ .

• Si  $\sum_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n F_i = F$ , la proposition précédente assure  $\dim F = \dim \left( \bigoplus_{i=1}^n F_i \right) = \sum_{i=1}^n \dim F_i$ .

• Si  $\dim F = \sum_{i=1}^n \dim F_i$ , alors la famille  $\mathcal{B}$  est génératrice de  $F$  et a pour cardinal la dimension de  $F$ , donc est une base de  $F$ .

Comme elle est libre, toute décomposition d'un vecteur  $x = \sum_{i=1}^s x_i$  dans la somme  $\sum_{i=1}^s F_i$  peut être vue comme une décomposition unique dans la base  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_s)$ , quitte à redécomposer chaque composante  $x_i \in F_i$  selon  $\mathcal{B}_i$ . On en déduit que la somme  $\sum_{i=1}^s F_i$  est directe.  $\square$

Remarque 4. ainsi  $\sum_{i=1}^p F_i = \bigoplus_{i=1}^p F_i$  si et seulement si  $\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ .

### III. Matrices par blocs, sous-espaces stables

#### III.1 Sous-espaces-stables par un endomorphisme

##### Définition 9.

Un sous-espace vectoriel  $F$  de l'espace vectoriel  $E$  est dit **stable** (ou invariant) par l'endomorphisme  $u$  appartenant à  $\mathcal{L}(E)$  si  $u(F) \subset F$ , i.e. :  $\forall v \in F, u(v) \in F$ .

##### Proposition 5.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors l'application  $F \rightarrow F, v \mapsto u(v)$  est un endomorphisme de  $F$ .

démonstration : la linéarité est directement issue de celle de  $u$  sur  $E$ , et la stabilité assure le caractère endomorphisme.  $\square$ .

##### Définition 10.

Si  $F$  est un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  stable par l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on définit l'**endomorphisme induit** par  $u$  sur  $F$ ; noté  $u|_F^F$  par :

$$\forall \vec{x} \in F, u|_F^F(\vec{x}) = u(\vec{x})$$

##### Proposition 6.

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans  $E$ ,  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$  une base adaptée à la somme directe  $E = F \oplus G$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $F$  est stable par l'endomorphisme  $u$  si et seulement s'il existe  $B, D$  telles

$$\text{que : } \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u|_F^F) & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

démonstration : directement :  $F$  est stable par  $u$  si et seulement si  $u(\mathcal{B}_F) \subset F = \text{Vect}(\mathcal{B}_F)$ .

##### Proposition 7.

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $u$ .

démonstration :

Pour  $x \in \text{Ker}(u)$ , on a  $u(u(x)) = u(0) = 0$ , donc  $u(x) \in \text{Ker}(u)$ .

Pour  $x \in E$  et  $y = u(x) \in \text{Im}(u)$ , on a  $u(y) = u(u(x))$ , donc  $u(y) \in \text{Im}(u)$ .  $\square$

**Proposition 8.**

Si  $u \circ v = v \circ u$  (i.e. si  $u$  et  $v$  commutent), alors  $\text{Ker}(u)$  est stable par  $v$ .

démonstration : Pour  $x \in \text{Ker}(u)$ , on a  $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ , donc  $v(x) \in \text{Ker}(u)$ .

□

Remarque 5. vrai pour l'image

exemple 13.  $f : P \mapsto P(X+1) - P(X)$  avec trigonalisation, les  $\mathbb{R}_i[X]$  sont stables.

**III.2 Matrices par blocs**

Rappel : l'expression du coefficient d'indice  $(i, j) \in \llbracket 1, p \rrbracket \times \llbracket 1, r \rrbracket$  de la matrice produit  $R = MN$  de  $M \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$  et

$$N \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K}) \text{ est : } (R)_{ij} = \sum_{k=1}^q m_{i,k} n_{k,j}$$

Pour  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$  et  $N = \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix}$ , avec  $A, S \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ ,  $B, T \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ ,  $C, U \in \mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ ,  $D, V \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$ ,

- on peut calculer "par blocs" de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & T \\ U & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS + BU & AT + BV \\ CS + DU & CT + DV \end{pmatrix}$$

Remarque 6. Dans le cas de matrices "diagonales par blocs", on a simplement :

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AS & 0 \\ 0 & DV \end{pmatrix}$$

- Les combinaison linéaires sont respectées.

- Transposées  $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} A^T & C^T \\ B^T & D^T \end{pmatrix}$



## IV. Déterminants

### IV.1 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $2 \times 2$

#### Définition 11.

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ . On appelle **déterminant** de  $A$  le scalaire, noté  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ , ou

encore  $\det A$  défini par :  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ .

#### Définition 12.

Soient  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$  et  $(i, j) \in \llbracket 1, 2 \rrbracket^2$ . On appelle **mineur** d'indice  $ij$  de  $A$  le scalaire, noté  $A_{ij}$  défini par :  $A_{ij} = a_{3-i, 3-j}$ .

### IV.2 Rappel : calcul du déterminant d'une matrice $n \times n$

#### Définition 13.

Pour tout entier  $n \geq 3$  on définit par récurrence le **déterminant** d'une matrice  $n \times n$  en posant, pour tout  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  appartenant à  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_{k1} \det(A_{k1}) = a_{11} \det(A_{11}) - a_{21} \det(A_{21}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{n1} \det(A_{n1})$$

où pour tout  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $A_{ij}$  la matrice  $(n-1) \times (n-1)$  obtenue en rayant dans  $A$  la ligne  $i$  et la colonne  $j$ .

#### Proposition 9 (dévpt. % à $j^{\text{ème}}$ colonne).

$$\det A = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj})$$

#### Proposition 10 (dévpt. % à $i^{\text{ème}}$ ligne).

$$\det A = \sum_{\ell=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{i\ell} \det(A_{i\ell})$$

exemple 14. par rapport à la 1ère ligne :  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} + 0 \times \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$

**Proposition 11** (opération du pivot de Gauss sur les colonnes).

Si  $A = (C_1 | \dots | C_n)$ , on ne change pas le déterminant en faisant une opération  $C_i \leftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$ , pour des scalaires  $(\lambda_j)_{j \neq i}$ .

**Proposition 12** (multiplication d'une colonne par un scalaire).

Si  $A = (C_1 | \dots | C_n)$  et  $B = (C_1 | \dots | \lambda C_{i_0} | \dots | C_n)$  s'en déduit en faisant l'opération  $C_{i_0} \leftarrow \lambda C_{i_0}$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $\det(B) = \lambda \det(A)$

exemple 15.  $\det(\lambda I_n) = \lambda^n \det(I_n) = \lambda^n$ .

**Proposition 13** (transposée).

Pour toute matrice carrée  $A$ , on a :  $\det(A^T) = \det(A)$

**Proposition 14** (CNS liberté).

Pour toute matrice carrée  $A = (C_1 | \dots | C_n)$ .  
 $\det(A) \neq 0$  si et seulement si la famille  $(C_1, \dots, C_n)$  est libre dans  $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$   
 $\det(A) \neq 0$  si et seulement si  $A$  est inversible (i.e. si l'endomorphisme canoniquement associé est bijectif)

Remarque 7. Si  $D = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p})$  alors

$$\det(D) = \prod_{k=1}^p \lambda_k^{m_k} \text{ et } D \text{ est inversible si et seulement si } 0 \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}.$$

### IV.3 Rappel : déterminant d'un produit

**Proposition 15.**

$\forall A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \det(AB) = \det(A) \det(B)$

démonstration : par récurrence sur la taille de  $A$  et développements par rapports aux colonnes de  $A$ .

**Proposition 16.**

$$\forall P \in GL_n(\mathbb{K}), \det(P^{-1}) = \frac{1}{\det(P)}$$

démonstration : Pour  $P$  inversible,  $1 = \det(I_n) = \det(PP^{-1}) = \det(P) \det(P^{-1})$ .  $\square$

## IV.4 Déterminants triangulaires par blocs

### Proposition 17.

Pour  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathfrak{M}_{p,p}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{p,r}(\mathbb{K})$ ,  $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$ , on peut calculer “par blocs” de la manière suivante :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

démonstration : à  $r \in \mathbb{N}^*$  fixé, on procède par récurrence sur  $p \geq 1$ .

- Le cas  $p = 1$ , est direct, par développement par rapport à la première colonne de toute matrice de la forme  $M = \begin{pmatrix} \alpha & B \\ 0_{r,1} & D \end{pmatrix}$ .
- Supposons la propriété vraie pour toute matrice triangulaire par blocs avec un bloc supérieur gauche de taille inférieure ou égale à  $p \times p$ .

Pour une matrice  $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{r,p+1} & D \end{pmatrix}$  avec  $A \in \mathfrak{M}_{p+1,p+1}(\mathbb{K})$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{p+1,r}(\mathbb{K})$ ,  $D \in \mathfrak{M}_{r,r}(\mathbb{K})$ , on obtient en dé-

veloppant par rapport à la première colonne :  $\det(M) = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det M_{k,1} = \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det \begin{pmatrix} A_{k,1} & (\star) \\ 0_{r,p} & D \end{pmatrix} =$

$$\sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}) \det(D) = \left( \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k+1} a_{k,1} \det(A_{k,1}) \right) \det(D) = \det(A) \det(D). \square$$

Remarque 8. Le déterminant d’une matrice triangulaire ou diagonale est le produit de ses coefficients diagonaux.

## IV.5 Matrices semblables

### Définition 14.

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Deux matrices carrées  $M$  et  $N$  appartenant à  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  sont dites **semblables** (sur  $\mathbb{K}$ ), s’il existe une matrice inversible  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  telle que  $N = P^{-1}MP$

Remarque 9. Si  $P$  est vue comme la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$  (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de  $P$ ),  $M$  et  $N$  représentent un même endomorphisme  $f$ , avec  $M = Mat_{\mathcal{B}}(f)$ ,

$N = Mat_{\mathcal{B}'}(f)$ , et  $Mat_{\mathcal{B}'}(f) = Pass_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}^{-1} Mat_{\mathcal{B}}(f) Pass_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

### Proposition 18.

Si  $M$  et  $N$  sont deux matrices semblables, alors  $\det(M) = \det(N)$ .

démonstration : Pour  $P$  inversible,  $\det(P^{-1}) = \det(P)^{-1}$ , donc  $\det(P^{-1}MP) = \det(P^{-1}) \det(M) \det(P) = \det(M) \det(P^{-1}) \det(P) = \det(M) \quad \square$

Remarque 10. la réciproque est fautive :  $0_2$  n’est pas semblable à  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Définition 15.**

Pour tout endomorphisme de  $E$ , on définit le déterminant de  $u$ , noté  $\det(u)$  par :

$$\det(u) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u))$$

où  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de  $E$ .

En effet, pour toute autre base  $\mathcal{B}'$ , en notant  $P = \text{Pass}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ , on a :  
 $\det(\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u)) = \det(P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) P) = \det(P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(u) P) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)) \det(P) \det(P^{-1}) = \det(\text{mat}_{\mathcal{B}}(u)).$

## V. Trace

### V.1 Définition

**Définition 16.**

Etant donné  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ , on appelle **trace** de la matrice  $A$  le nombre, noté  $\text{Tr}(A)$  défini par :

$$\text{Tr}(A) = \sum_{k=1}^n a_{kk}$$

Remarque 11. Si  $D = \text{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_p})$  alors  $\text{Tr}(D) = \sum_{k=1}^p m_k \lambda_k$  est la somme des coefficients diagonaux comptés avec multiplicité (nb d'occurrences).

### V.2 Propriétés

**Proposition 19** (linéarité de la trace).

Pour tous  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et tous  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$

**Proposition 20** (trace de la transposée).

Pour tout  $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\text{Tr}(A^T) = \text{Tr}(A)$

**Proposition 21** (trace d'un produit).

Pour tous  $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et tous  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

démonstration : Pour  $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), AB = C = (c_{ik})$  et  $BA = D = (d_{j\ell})$ , on a :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{ii} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ji} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{ji} a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n d_{jj} = \text{Tr}(BA) \quad \square$$

Remarque 12. Attention, en général,  $\text{Tr}(AB) \neq \text{Tr}(A) \text{Tr}(B)$ ; par exemple  $\text{Tr}(I_n^2) = n \neq \text{Tr}(I_n)^2$  pour  $n \geq 2$ .

Remarque 13.  $\text{Tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Proposition 22** (trace de matrices semblables).

Deux matrices semblables ont même trace.

i.e. : si  $M, N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  vérifient  $N = P^{-1}MP$ , alors  $\text{Tr}(N) = \text{Tr}(M)$

démonstration :  $\text{Tr}(P^{-1}MP) = \text{Tr}(PP^{-1}M) = \text{Tr}(I_n M) = \text{Tr}(M)$   $\square$

Remarque 14. Si  $P$  est vue comme la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$  (dont les vecteurs se décomposent dans la base canonique comme les colonnes de  $P$ ),  $M$  et  $N$  représentent un même endomorphisme  $f$ , avec  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ , on a  $N = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ . Ainsi on obtient le même résultat en calculant le nombre Trace de la matrice correspondant à la matrice de  $f$  dans une base quelconque.  $N = P^{-1}MP$

**Définition 17.**

Etant donné  $f \in \mathcal{L}(E)$ , on appelle **trace** de  $f$  le scalaire, noté  $\text{Tr}(f)$  défini par  $\text{Tr}(f) = \text{Tr}(\text{mat}_{\mathcal{B}}(f))$ , où  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de l'espace vectoriel  $E$  de dimension finie.

## VI. Propriétés avancées

### VI.1 Produit fini d'espaces vectoriels

**Définition 18.**

Etant donnés  $p$  espaces vectoriels sur  $\mathbb{K}$ , on définit leur ensemble **produit** :

$$\prod_{i=1}^p E_i = \{(v_1, \dots, v_p); \forall 1 \leq i \leq p, v_i \in E_i\}$$

**Proposition 23.**

Etant donnés  $p$  espaces vectoriels  $(E_1, \dots, E_p)$  sur  $\mathbb{K}$  leur produit  $\left(\prod_{i=1}^p E_i, +_\pi, \cdot_\pi\right)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, pour les lois  $+_\pi$  et  $\cdot_\pi$  définies par :

$$\forall (v_1, \dots, v_p), (w_1, \dots, w_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, (v_1, \dots, v_p) +_\pi (w_1, \dots, w_p) = (v_1 + w_1, \dots, v_p + w_p)$$

$$\forall (v_1, \dots, v_p) \in \prod_{i=1}^p E_i, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot_\pi (v_1, \dots, v_p) = (\lambda v_1, \dots, \lambda v_p)$$

En outre, si pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$   $E_i$  est de dimension finie égale à  $d_i \in \mathbb{N}^*$ , alors  $\prod_{i=1}^p E_i$  est de dimension  $\sum_{i=1}^p d_i$ .

*démonstration* : la vérification des propriétés de  $\mathbb{K}$ -e.v. est directe à partir des structures de  $\mathbb{K}$ -e.v. des  $(E_i, +, \cdot)$ .

Pour la dimension, il suffit de remarquer qu'étant données des bases  $\mathcal{B}_i = (e_{i,k})_{1 \leq k \leq d_i}$ , la famille

$$\left( \left( \underbrace{(0, \dots, 0)}_{i-1}, e_{i,k}, \underbrace{(0, \dots, 0)}_{p-i} \right)_{1 \leq k \leq d_i} \right)_{1 \leq i \leq p}$$

est libre et génératrice, et possède  $\sum_{i=1}^p d_i$  éléments  $\square$

*Remarque 15.* Etant donnés  $p$  sous-espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p$  d'un même espace vectoriel  $E$ , l'application

$$\varphi : \prod_{i=1}^p E_i \longrightarrow \sum_{i=1}^p E_i; \varphi(v_1, \dots, v_p) = \sum_{i=1}^p v_i$$

définie par est une application linéaire.

Comme  $\dim\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i) \geq \dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right)$

Elle est bijective ssi  $\sum_{i=1}^p \dim(E_i) = \dim\left(\sum_{i=1}^p E_i\right)$ , d'après le théorème du rang.

Comme la bijectivité de  $\varphi$  est équivalente à l'unicité des décomposition dans la somme  $\sum_{i=1}^p E_i$ , cela permet de redémontrer la C.N.S. de somme directe, pour une somme de  $p$  sous-espaces vectoriels.

NOUVEAU Programme 2022

## VI.2 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

### 2.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange;
- passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition  $E = \bigoplus E_i$ .

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie,

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

#### b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si  $u$  et  $v$  commutent alors le noyau de  $u$  est stable par  $v$ .

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

#### c) Trace

Trace d'une matrice carrée.

Linéarité, trace d'une transposée.

Relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

ancien Programme PC :

## Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace;
- passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

### CONTENUS

### CAPACITÉS & COMMENTAIRES

#### a) Produit et somme d'espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels; sous-espaces supplémentaires.

Base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$ ; base d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe  $E = \bigoplus E_i$ .

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

#### b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si  $u$  et  $v$  commutent, le noyau et l'image de  $u$  sont stables par  $v$ .

Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

#### c) Déterminants

Exemples de déterminants.

Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.

$\Leftrightarrow$  I : calcul du déterminant d'une matrice.

#### d) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.

La notion de matrices équivalentes est hors programme.



CONTENUS

*Trace d'une matrice carrée. Linéarité; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.  
Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.*

CAPACITÉS & COMMENTAIRES