

Table des matières

| | |
|---|----------|
| I. Polynômes d'endomorphisme | 2 |
| I.1 Définition, notations | 2 |
| I.2 Polynômes annulateurs | 2 |
| 2.a) Définition | 2 |
| 2.b) Produits de polynômes | 3 |
| 2.c) Calcul d'inverse | 3 |
| 2.d) Cas matriciel | 3 |
| 2.e) Calculs des puissances par divisions euclidiennes | 4 |
| II. Interpolation de Lagrange | 4 |
| II.1 Définition | 4 |
| II.2 Propriétés | 4 |
| II.3 Interpolation de Lagrange | 5 |
| II.4 Vandermonde | 6 |
| II.5 Algèbre linéaire | 8 |
| 5.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices | 8 |

Pré-requis

Somme des termes d'une suite géométrique, théorème des suites adjacentes, séries numériques de 1ère année

Objectifs

I. Polynômes d'endomorphisme

I.1 Définition, notations

Définition 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$. On appelle polynôme d'endomorphisme $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k$, où $u^k = \text{Id}$ si $k = 0$ et $u^k = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{k \text{ fois}}$ si ≥ 1

Remarque 1. Idem avec matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

exemple 1. $X^0(u) = u^0 = \text{Id}_E$

$$X(u) = u$$

$$X^2(u) = u \circ u$$

exemple 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^2 = 2A - I_2$$

I.2 Polynômes annulateurs

2.a) Définition

Définition 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$.

On dit que P est annulateur de u si : P EST NON NUL et $P(u) = \sum_{k=0}^d a_k u^k = O_{\mathcal{L}(E)}$

Définition 3.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$.

On dit que P est annulateur de A si : P EST NON NUL et $P(A) = \sum_{k=0}^d a_k A^k = O_n$

exemple 3. $X^0(A) = A^0 = I_n$

$$X(A) = A$$

$$X^2(A) = A \times A$$

exemple 4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$P = (X - 1)^2$ annulateur de A car $A^2 = 2A - I_2$

2.b) Produits de polynômes

Proposition 1.

$$(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u), \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall u \in \mathcal{L}(E)$$

$$(PQ)(A) = P(A) \times Q(A) \forall P, Q \in \mathbb{K}[X], \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

2.c) Calcul d'inverse

Proposition 2.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$, tel que $a_0 \neq 0$.

Si P est annulateur de u , alors u est inversible, d'inverse $u^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k u^{k-1}$

dém : $u \circ \left(\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k u^{k-1} \right) = -\text{Id}_E$

exemple 5. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P = (X - 1)(X - 3)$ annulateur de M , c'est à dire

$$M^2 - 4M + 3I_2 = 0, \text{ donc } \frac{-1}{3}M(M - 4I_2) = I, \text{ et } M^{-1} = \frac{-1}{3}(M - 4I_2) = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2/3 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

2.d) Cas matriciel

Proposition 3.

Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme, avec $d \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K}$, tel que $a_0 \neq 0$.

Si P est annulateur de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible, d'inverse $A^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^d a_k A^{k-1}$

2.e) Calculs des puissances par divisions euclidiennes

Remarque 2. On peut aussi calculer les puissance : si R_p est le reste de X^p dans la division euclidienne $X^p = PQ_p + R_p$ de X^p par P annulateur, alors

$$A^p = P(A)Q_p(A) + R_p(A) = R_p(A)$$

Et si P scindé à racines simples $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alors $R_p(\lambda_i) = \lambda_i^p$ permet de trouver R_p explicitement.

lemme 4. $S = PQ + R$ avec P annulateur, alors $S(A) = R(A)$, en particulier $A^p = R_p(A)$ pour R_p le polynôme de reste dans la division euclidienne de X^p par P annulateur.

On trouve les coeff de R_p en évaluant en les racines simples de P , voire en dérivant puis évaluant pour les racines multiples.

Exemple $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, calcul de J^p .

II. Interpolation de Lagrange

II.1 Définition

Définition 4.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. Les polynômes de Lagrange sont les $(L_i)_{0 \leq i \leq n}$ définis par :

$$L_i = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq i} \frac{1}{(a_i - a_j)} (X - a_j)$$

II.2 Propriétés

Proposition 5.

$$L_i(a_j) = \delta_i^j$$

dém : par construction !

Proposition 6.

(L_i) base de $\mathbb{K}_n[X]$

dém : Liberté : si $\sum \lambda_i L_i = O$, alors en a_j , $\lambda_j \times 1 = 0$. Puis par cardinal égale dimension, on obtient une base.

Proposition 7.

$$\forall P \in \mathbb{K}_n[X], P = \sum_{i=0}^n P(a_i) L_i.$$

dém : Liberté : si $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i = P$, alors en a_j , $\lambda_j \times 1 = P(a_j)$; la décomposition est unique dans une base.

Corollaire 8.

$$1 = \sum_{i=0}^n L_i.$$

dém :

variante directe : On note $P = 1$ et $Q = \sum_{i=0}^n L_i$.

Ils s'agit de deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et on vérifie que pour $0 \leq k \leq n$, $P(x_k) = 1 = L_k(x_k) = \sum_{i=0}^n L_i(x_k)$, car

$$L_i(x_k) = \delta_i^k, \forall 0 \leq i \leq n.$$

Donc P et Q coïncident en $n + 1$ valeurs distinctes et sont de degrés au plus n , donc sont égaux, d'où

$$1 = \sum_{i=0}^n L_i$$

II.3 Interpolation de Lagrange

Pour approcher une fonction continue f , sur un intervalle, on peut prendre le polynôme interpolant les $f(x_i)$ en les a_i .

II.4 Vandermonde

Définition 5.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **déterminant de Vandermonde** le scalaire noté $V(a_1, \dots, a_n)$ défini par :

$$V(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

lemme 9. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}, \quad V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$

démonstration :

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} & a_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} & a_n^n \\ 1 & a_{n+1} & a_{n+1}^2 & \dots & a_{n+1}^{n-1} & a_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

On fait successivement et dans cet ordre, pour k allant en décroissant de $n+1$ à 2, on fait $C_k \leftarrow C_k - a_{n+1}C_{k-1}$:

$$V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & (a_1 - a_{n+1}) & a_1(a_1 - a_{n+1}) & \dots & a_1^{n-2}(a_1 - a_{n+1}) & a_1^{n-1}(a_1 - a_{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 1 & (a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) & \dots & a_{n-1}^{n-2}(a_{n-1} - a_{n+1}) & a_{n-1}^{n-1}(a_{n-1} - a_{n+1}) \\ 1 & (a_n - a_{n+1}) & a_n(a_n - a_{n+1}) & \dots & a_n^{n-2}(a_n - a_{n+1}) & a_n^{n-1}(a_n - a_{n+1}) \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n+2}(a_1 - a_{n+1}) \times \dots \times (a_n - a_{n+1}) \times V(a_2, \dots, a_n, a_{n+1}) = \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n)$$

en développant par rapport à la première ligne puis en factorisant en ligne. \square

Proposition 10 (déterminant de Vandermonde).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$, $V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{i=1}^{n-1} \left(\prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i) \right) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

démonstration : par récurrence sur $n \geq 1$.

- L'initialisation est immédiate pour $n = 1$.
- supposons la propriété vraie au rang n .

On a :

$$\begin{aligned} V(a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) &= \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \times V(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^n (a_{n+1} - a_k) \times \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i) \right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(\prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i) \right) \times \prod_{j=1}^n (a_{n+1} - a_j) = \prod_{i=1}^{n+1} \left(\prod_{j=i+1}^n (a_j - a_i) \right) \end{aligned}$$

Proposition 11.

$V_{n+1}(a_0, \dots, a_n) \neq 0$ assure que le système $MX = Y$ admet une unique solution où

$Y = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, $M = (a_i^j)_{0 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Vandermonde, et $X = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$, avec $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k$ l'unique polynôme d'interpolation de Lagrange.

Remarque 3. En effet, le problème d'interpolation revient à résoudre le système d'inconnue X :

$$M \times \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P(a_0) \\ P(a_1) \\ \vdots \\ P(a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

NOUVEAU Programme 2022

II.5 Algèbre linéaire

Dans toute cette partie, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

5.a) A - Compléments sur les espaces vectoriels, les endomorphismes et les matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- introduire de nouveaux concepts préliminaires à la réduction des endomorphismes : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, somme directe, sous-espaces stables, matrices par blocs, trace, polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées, polynômes interpolateurs de Lagrange;
- passer du point de vue vectoriel au point de vue matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et préconise l'illustration des notions et résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

Polynôme d'un endomorphisme, d'une matrice carrée.
Polynôme annulateur.
Deux polynômes de l'endomorphisme u commutent.
Adaptation de ces résultats aux matrices carrées.

Relation $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
Application au calcul de l'inverse et des puissances.
Le noyau de $P(u)$ est stable par u .

e) Interpolation de Lagrange

Base de $\mathbb{K}_n[X]$ constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points distincts de \mathbb{K} .

Déterminant de Vandermonde.

Expression d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.
La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en $n + 1$ points est le polynôme constant égal à 1.
Lien avec le problème d'interpolation de Lagrange.

ancien Programme PC :

Espaces vectoriels, endomorphismes et matrices

Le programme est organisé autour de trois objectifs :

- consolider les acquis de la classe de première année;
- étudier de nouveaux concepts : somme de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces stables, trace;
- passer du registre géométrique au registre matriciel et inversement.

Le programme valorise les interprétations géométriques et l'illustration des notions et des résultats par de nombreuses figures.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Produit et somme d'espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels; sous-espaces supplémentaires.

Base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à un sous-espace vectoriel F de E ; base d'un espace vectoriel E de dimension finie adaptée à une décomposition en somme directe $E = \bigoplus E_i$.

Si F_1, \dots, F_p sont des sous-espaces de dimension finie, alors :

$$\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Décomposition en somme directe obtenue par fractionnement d'une base.

b) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations.

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Si u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v .

Les étudiants doivent savoir traduire matriciellement la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interpréter en termes d'endomorphismes une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

c) Déterminants

Exemples de déterminants.

Les étudiants doivent savoir calculer le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, et connaître l'expression d'un déterminant de Vandermonde.
 $\Leftrightarrow I$: calcul du déterminant d'une matrice.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

d) Matrices semblables et trace

Matrices semblables.

Trace d'une matrice carrée. Linéarité; trace de la transposée d'une matrice, du produit de deux matrices.

Invariance de la trace par similitude. Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie.

La notion de matrices équivalentes est hors programme.