Méthodes à retenir :
- Utiliser un polynôme annulateur pour calculer les puissances d'une matrice ou son inverse si elle est inversible

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)(M - 2I_2)(M - 3I_3)$.

Exercice 2 ☆

Trouver l'inverse de A inversible telle que $A^3 + I_n = 0_n$

Exercice 3 ☆

Calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & 2 & & & 2^{n-1} \\ & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & n & & & n^{n-1} \end{vmatrix}$;

II. Exercices

Exercice 4 ☆

Trouver un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, après avoir calculé $(M - I_3)$, $(M - I_3)^2$, $(M - I_3)^3$.

Exercice 5 ☆☆

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, P un polynôme annulateur de A, Q un polynôme annulateur de C. Démontrer que $R = PQ$ est un polynôme annulateur de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & C \end{pmatrix}$

Exercice 6 ☆☆

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $P = (X - 1)(X + 1)$ est annulateur de A, et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 7 ☆☆

Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice ne contenant que des 1.

1. Calculer J^2.
2. En déduire un polynôme Q annulateur de J.
3. En déduire la valeur de J^k pour tout $k \geq 2$, en fonction de I_n, J et k.

Exercice 8 *polynômes d'interpolation de Lagrange*

Soient $a_0 = 0,\ a_1 = 2,\ a_0 = 8$, et $b_0 = 1,\ a_1 = \pi,\ a_0 = \pi^2$.

Posons $L_0 = \dfrac{(X-2)}{0-2} \times \dfrac{(X-8)}{0-8}$, $L_1 = \dfrac{(X-0)}{2-0} \times \dfrac{(X-8)}{2-8}$, et $L_2 = \dfrac{(X-0)}{8-0} \times \dfrac{(X-2)}{8-2}$

1. Vérifier que $L_p(a_q) = \delta_p^q$, pour tout $p, q \in [\![0, 2]\!]$
2. Montrer que la famille $\mathcal{F} = (L_0, L_1, L_2)$ est libre.
3. En déduire que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
4. Donner la décompostion de $S = 1 + X$ dans cette base.
5. S est-il l'unique polynôme de degré au plus 2 valant 1 en 0, 3 en 2 et 9 en 8 ? Même question parmi les polynômes de degré au plus 3.

Exercice 9

Donner un polynôme réel P de degré au plus 2 tel que $P(-1) = 1$, $P(0) = 2$ et $P(1) = 3$. Est-il unique ?

Exercice 10 ✰

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée telle qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $A^p = 0_n$. (matrice nilpotente d'indice p). Calculer $\det A$.

III. Exercices avancés

Exercice 11 ✰

Démontrer que l'ensemble des polynômes annulateurs de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par multiplication par un polynôme.

Exercice 12 ✰✰✰

Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

Calculer $M - I_3$, $(M - I_3)^2$, et en déduire que l'ensemble des polynôme annulateurs (réels) de M est $\mathcal{A} = \{(X+1)^2 S ; S \in \mathbb{R}[X]\}$.

Exercice 13

Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ calculer J^2 , en déduire que J est inversible, calculer J^{-1} , pour a, b complexes et $M = aJ + bI_3$, calculer M^n (on pourra étudier le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$).

Exercice 14

Notons $E = \mathbb{R}[X]$. Soit $P = X^2 + 3X + 1$.

1. Justifier que $F = P\ \mathbb{R}[X]$ (ensemble des multiples de P) est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ qui à tout polynôme Q associe son reste dans la division eucldienne par P.
   (a) Rappeler le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$.
   (b) Montrer que f est une application linéaire.
   (c) Déterminer l'image et le noyau de f.
3. Soit $G = \mathbb{R}_1[X]$. Justifier que F et G sont des s.e.v. supplémentaires de E.

Exercice 15 ✰✰✰

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et N^3 et en déduire un polynôme annulateur de N.

Pour $k \in \mathbb{N}$, calculer N^k en fonction de k, en explicitant ses coefficients.

Exercice 16

1. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^2.
2. Montrer que le polynôme $X^2 - X - 2$ est annulateur de J.
3. En déduire que J est inversible, calculer J^{-1}.
4. Pour a, b complexes et $M = aJ + bI_3$, calculer M^n (on pourra étudier le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - X - 2$).

Notes

[3] correction :

[7] correction : $J^2 = nJ$, $Q = X^2 - nX$ $X^k = B_kQ + R_k$, donc $J^k = a_kI_n + b_kJ$ avec en évaluant en 0 $0 = 0^k + a_k$ et en évaluant en $1/n$, $1/n^k = b_k/n$, d'où $J^k = \dfrac{1}{n^{k-1}}J$