Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Couples de variables aléatoires discrètes

I.1 Couple

Définition 1 (Couple de variables aléatoires discrètes)**.**

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'application **couple** notée (X, Y) définie par $(X, Y) : \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Définition 2.

Etant donnnées X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire (X, Y), définie par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \mathbf{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Les lois $\mathbf{P}_X$ de X et $\mathbf{P}_Y$ de Y sont appelées les **lois marginales** de (X, Y).

exemple 1. En pratique, on fait un tableau à double entrée donnant les $\mathbf{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$:

$Y \setminus X$	x_0	x_1	x_2	$\mathbf{P}_X$
y_0	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$6/16$
y_1	$1/16$	$7/16$	$2/16$	$10/16$
$\mathbf{P}_Y$	$2/16$	$9/16$	$5/16$	

Remarque 1. Attention : la données des marginales ne donne pas la loi du couple !
contre-exemple : (X, Y) suit la loi uniforme sur $\{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$
et (X', Y') donnée par $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,0) = 1/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,0) = 3/8$ $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0,1) = 3/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1,1) = 1/8$ ont les mêmes marginales, mais ne sont pas égales !!!
En revanche, $\mathbf{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x)$: la loi du couple donne les marginales.

Définition 3.

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de** Y **sachant** $\{X = x\}$ la loi de probabilité définie pour les $y \in Y(\Omega)$ par $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$.

I.2 Indépendance de deux variables

Définition 4 (Variables indépendantes)**.**

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
Si tel est le cas, on note $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$ le fait que X et Y sont indépendantes.

Notation : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Remarque 2. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Définition 5 (alternative)**.**

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si,
$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \mathbf{P}(\{X = x, Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y)$.

Remarque 3. on note $\{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$

Proposition 1.

Soient X et Y sont deux variables aléatoires.
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

I.3 Propriétés de l'espérance

Proposition 2.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X, Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

I.4 Propriétés des fonctions génératrices

Proposition 3.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

dém : par indépendance de t^X et t^Y, $\mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y]$
Remarque Cela s'étend aux sommes finies.

I.5 Variance d'une somme

Proposition 4.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]$.

Démonstration : $((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))^2 = (X-\mathbb{E}(X))^2 + 2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) + (Y-\mathbb{E}(Y))^2$

Définition 6 (Covariance)**.**

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

En cas d'indépendance, la covariance est nulle.

Proposition 5.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

I.6 Covariance, corrélation

Proposition 6.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration

Définition 7 (coefficient de corrélation)**.**

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}}$$

Remarque 4. En cas d'indépendance, la corrélation vaut 0.
En cas de relation $Y = aX + b$, la corrélation vaut 1 ou -1.

Définition 8.

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition 7 (Cauchy-Schwarz).

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\,\mathbb{V}(Y)}$$

$$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$$

démonstration : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\mathbb{V}(tX+Y) = t^2\mathbb{V}(X) + 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$, trinôme dont le discriminant ne change pas de signe.

Dans le cas de variables à valeurs dans un ensemble fini, il y a égalité ssi $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ sont colinéaires, i.e. ssi $\exists\, a;\ a(X - \mathbb{E}(X)) = Y - \mathbb{E}(Y)$ ssi $\exists\, a, b;\ aX + b = Y$ □

Remarque 5. Régression linéaire : si $|\rho| = 1$, alors égalité dans Cauchy-Schwarz : $(X - \mathbb{E}(X))$ et $(Y - \mathbb{E}(Y))$ sont colinéaires, donc il existe a, b tels que $Y = aX + b$.

Sinon, on pose $\Xi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$

on cherche $\hat{a}, \hat{b}$ tels que $\left\|\Gamma - \hat{a}\Xi + \hat{b}(1\dots1)\right\|_2^2 = \left\|M\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \Gamma\right\|_2^2$ soit minimale, avec $M = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

OK pour $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$ le projeté de Γ sur $\mathrm{Im}(M)$.

II. Suites de variables aléatoires

II.1 Indépendance d'une famille de variables

Définition 9 (Variables mutuellement indépendantes).

Des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ \mathbf{P}((X_i)_{1\leq i\leq n} = (x_i)_{1\leq i\leq n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

Définition 10 (Suite de variables aléatoires indépendantes).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **(mutuellement) indépendantes** si
pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Définition 11 (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.**

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si
$\forall i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

exemple 2. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

On note $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, et $X_1, \ldots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $b(p)$.

Alors $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(N,p)$.

En effet, S_N est à valeurs dans $[\![0,N]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,N]\!]$ on a :

$$\mathbf{P}(\{S_N = k\}) = \mathbf{P}(\{\sum_{i=1}^{N} X_i = k\}) = \mathbf{P}(\bigcup_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \{(X_1,\ldots,X_N) = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)\}) \underset{evnmts\ incompatibles}{=}$$

$$\sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \mathbf{P}(\{(X_1,\ldots,X_N) = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)\}) \underset{indep.}{=} \sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} p^k(1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} p^k(1-p)^{N-k}$$

exemple 3. Attention : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse !

Contre-exemple : X et Y indépendantes de loi $b(1/2)$, $Z = (2X-1)(2Y-1)$.

$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) + \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/2$ $\mathbf{P}(Z=-1) = \mathbf{P}(X=0, Y=1) + \mathbf{P}(X=1, Y=0) = 1/2$

$\mathbf{P}(Z=1, X=0) = \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)$, $\mathbf{P}(Z=1, X=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=1)$ d'où l'indépendance 2 à 2.

En revanche, $\mathbf{P}(Z=1, X=0, Y=1) = 0 \neq \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$

Définition 12 (Variables i.i.d.)**.**

Une suite de variables aléatoires (x_n) est constituée de variables indépendantes identiquement distribuées si :

- les X_n sont (mutuellement) indépendantes
- Les $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ ont toutes la même loi de probabilité.

exemple 4. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

II.2 Coalitions

Proposition 8 (lemme des coalitions)**.**

si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

III. Inégalités asymptotiques

III.1 Introduction : répétition d'évènements indépendants

Exemple :
on répète une expérience incertaine sur une grande population de taille N_0, et on aimerait comprendre le phénomène « en moyenne. »

• **Pour le probabiliste**, il s'agit de déterminer un modèle aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, représentant les différents résultats individuels.
Le comportement moyen d'un groupe de N variables est caractérisé par la variable aléatoire moyenne

$$S_N = \frac{X_1 + \dots X_N}{N}$$

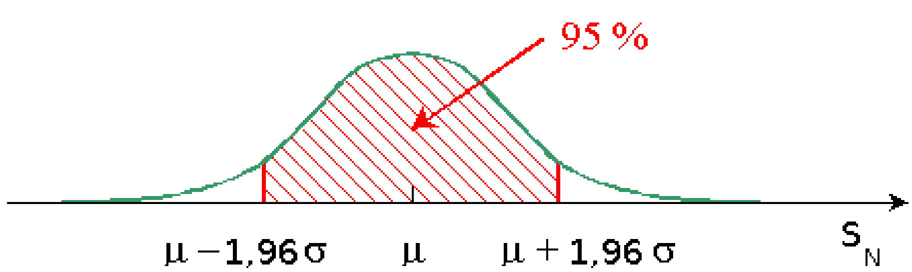
Il s'agit de comprendre les lois de S_N pour $N \in [\![1, N_0]\!]$.

• **Pour le statisticien**, on dispose d'un échantillon $(x_1, \dots, x_N)$ correspondant à un sondage d'une partie de la population, et on aimerait tester son comportement moyen, à l'aide d'un modèle probabiliste, pour prédire l'état du système $(x_1, \dots, x_{N_0})$
Pour cela, on s'appuie sur la moyenne observée $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \dots x_N}{N}$ sur l'échantillon sondé.

Réponse du programme de lycée :
Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes de même loi usuelle,
admettant une « espérance »$\mu \in \mathbb{R}$ et une « variance » $\sigma^2 > 0$, alors lorsque $N \to +\infty$
$S_N = \dfrac{X_1 + \dots X_N}{N}$ se comporte comme une variable gaussienne de densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
On a

$$\mathbf{P}\left(\left\{|S_N - \mu| \leq 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right) \leq 0,95$$

ce qui signifie qu'avec une probabilité supérieur à 95%, $\left|\dfrac{X_1 + \dots X_N}{N} - \mu\right| \leq 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$



Interprétation : la moyenne empirique observée sur l'échantillon $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \dots x_N}{N}$ doit être souvent proche de l'espérance μ, et dans l'intervalle de cofiance $I_{0,95} = [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ dans 95% des observations.

III.2 Variables centrées réduites, sommes finies de v.a.i.i.d.

2.a) Variable centrée réduite

Proposition 9.

Soit X une v.a. telle que X^2 admet une espérance et telle que $\sigma(X) > 0$.
Alors $N = \dfrac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite, c'est à dire
$\mathbb{E}[N] = 0$ (N centrée)
et
$\sigma(N) = 1$ (N réduite)

2.b) Somme de v.a.i.i.d.

Proposition 10.

Soient $X_1, \dots X_n$ des v.a.i.i.d. telles que X_1 admet une espérance.
En notant $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$ et soit $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Alors $\mathbb{E}[S_n] = nm$ et $\mathbb{V}[S_n] = n\sigma^2$, de sorte que $N = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ est centrée réduite.

III.3 Comportement asymptotique

3.a) Inégalité de Markov

Proposition 11 (Inégalité de Markov)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance finie.
Alors pour tout $t > 0$, on a $\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{t}}$

démonstration :
On note Y la v.a.r. définie pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) = \begin{cases} t & \text{si } |X(\omega)| \geq t \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| < t \end{cases}$
Ainsi Y est égale à t si $X \geq t$ et à 0 sinon, et se note $Y(\cdot) = t\,\mathbf{1}_{|X|\geq t}(\cdot)$.
On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\boxed{|X(\omega)| \geq Y(\omega)}$
(car si ω est tel que $|X(\omega)| \geq t$, alors $|X(\omega)| \geq= Y(\omega)$ et si ω est tel que $|X(\omega)| < t$, alors $|X(\omega)| \geq 0 = Y(\omega)$)
Y est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, donc admet une espérance.
$|X|$ admet une espérance, car la série $\sum |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge, puisque X admet une espérance.
D'après la croissance de l'espérance, on en déduit que :
$\boxed{\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(Y)}$
or $\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbf{P}(\{Y = 0\}) + t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{|X| \geq t\})$
d'où $\mathbb{E}(|X|) \geq t\mathbf{P}(|X| \geq t)$, puis on divise par $t > 0$. $\square$

3.b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

En corollaire de l'inégalité de Markov, on en déduit une seconde inégalité :

Corollaire 12 (inégalité de Markov pour X^2)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{t^2}$

démonstration : Markov appliqué à la v.a.r. X^2, en remarquant que $X^2 \geq t^2 \iff |X| \geq t$. $\square$

Proposition 13 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$

démonstration : 2ème inégalité de Markov appliqué à $(X - \mathbb{E}(X))$ $\square$

Remarque 6. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la variation par rapport à la moyenne.

3.c) Application : Loi des grands nombres

Théorème 14 (Loi faible des grands nombres)**.**

si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

démonstration : Conséquence de Bienaymé-Tchebychev pour $X = \dfrac{S_n}{n}$, variable d'espérance m et de variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \dfrac{\frac{1}{n} \times \sigma^2}{\varepsilon^2}}$ $\square$

Remarque 7. Intervalle de confiance à 95% pour $n = 1000$ tirages $0,95 = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, donc $\varepsilon = \sqrt{0.95} * \sigma * n$ c'est peu précis.

En pratique celui obtenu par le théorème de la limite centrale est meilleur.

Remarque 8. (HP) Méthode de Monte-Carlo : pour approcher $\displaystyle\int_0^1 f$, on calcule $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(X_i)}{N}$ pour des X_i de loi uniforme sur $[0,1]$...

III.4 Compléments

Proposition 15 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que X^2 et Y^2 admet des espérance, alors $(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\,\mathbb{E}(Y^2)$.

NOUVEAU Programme PC 2022 :

Variables aléatoires discrètes

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Contenus	Capacités & commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X = x, Y = y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$. Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance	
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite. Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	
d) Inégalités probabilistes	
Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite i.i.d. de variables aléatoires de variance finie, alors en notant $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ et $m = \mathrm{E}(X_1)$, pour tout $\varepsilon > 0$: $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$	Les étudiants doivent savoir retrouver, avec $\sigma = \sigma(X_1)$: $$P\left(\left\|\frac{S_n}{n} - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$