Table des matières

Pré-requis

Cours de PCSI, dérivées partielles d'une fonction de deux variables.

Objectifs

Comprendre les notations différentielles, faire le lien avec la physique. Etudier les extremums d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

I. Rappels de PCSI : fonctions de 2 variables

On note $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

I.1 Dérivées partielles premières

Définition 1.

Soit a un point de $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$.
On dit que $f : (x, y) \longmapsto f(x, y)$ admet une dérivée partielle en a par rapport à sa 1ère variable si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(f(a + h\overrightarrow{e_1}) - f(a)\right)$$

Si tel est le cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ la valeur de cette limite.
On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa 2ème variable si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{k \to 0} \frac{1}{k} \left(f(a + k\overrightarrow{e_2}) - f(a)\right)$$

Si tel est le cas on note $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$ la valeur de cette limite.

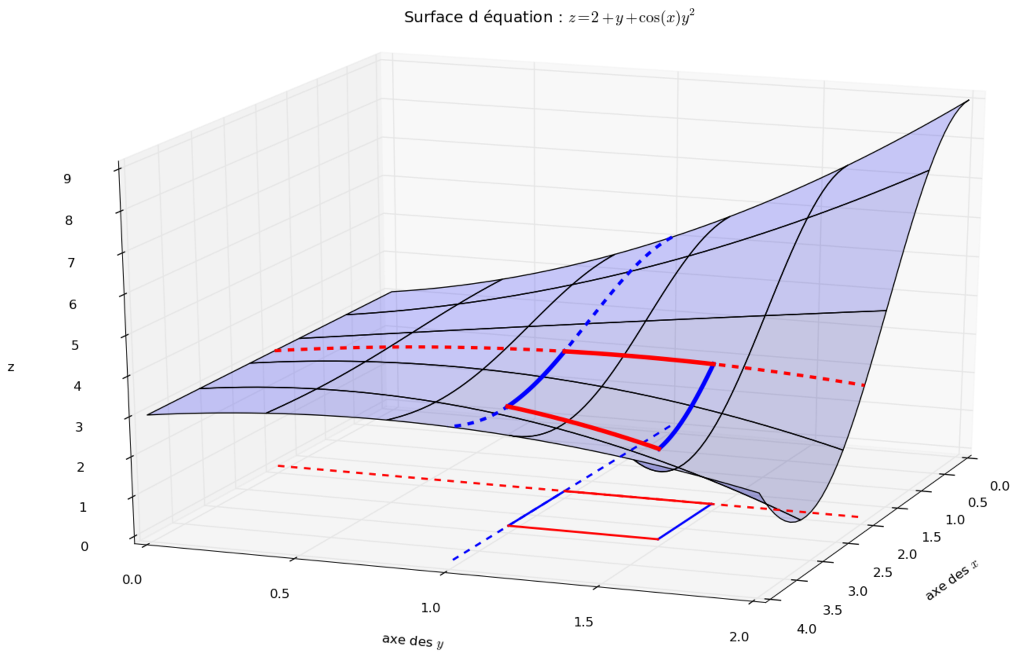
I.2 La classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Notation 1. *On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

I.3 DL1



Proposition 1 (D.L. d'ordre 1)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a=(a_1,a_2)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors
$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a)+h_1\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)+h_2\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)+o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$

démonstration (HP) :
On pose $f_{\cdot,a_2}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_1\mapsto f(x_1,a_2)$
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f_{\cdot,a_2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc
$f_{\cdot,a_2}(a_1+h_1) \underset{h_1\to 0}{=} f_{\cdot,a_2}(a_1)+h_1\dfrac{\mathrm{d}f_{\cdot,a_2}}{\mathrm{d}x_1}(a_1)+o(h_1)$
ou encore

$$f(a_1+h_1,a_2) \underset{h_1\to 0}{=} f(a_1,a_2)+h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)+o(h_1) \tag{1}$$

De même on pose $f_{a_1+h_1,\cdot}:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x_2\mapsto f(a_1+h_1,x_2)$ et on obtient :
$f_{a_1+h_1,\cdot}(a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f_{a_1+h_1,\cdot}(a_2)+h_2\dfrac{\mathrm{d}f_{a_1+h_1,\cdot}}{\mathrm{d}x_1}(a_1)+o(h_2)$
ou encore

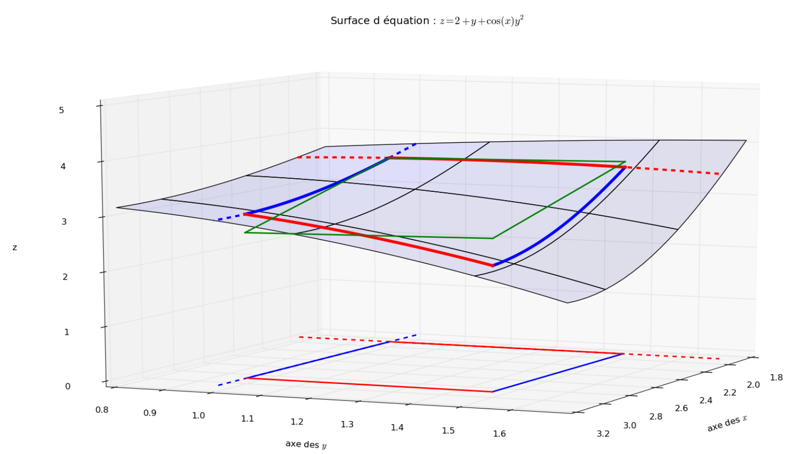
$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f(a_1+h_1,a_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,a_2)+o(h_2) \tag{2}$$

Or par continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1,a_2) \underset{h_1\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)+o(h_1) \tag{3}$$

Mais alors, d'après (9), (10), (11), on a

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f(a_1,a_2)+h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1,a_2)+h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,a_2)+o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}\right) \tag{4}$$



Corollaire 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I.4 Vecteur gradient et plan tangent

Définition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle (vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Proposition 4.

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $z = f(x, y)$, où $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$, avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$.
le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en (x_0, y_0) est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

Proposition 5 (D.L. d'ordre 1)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a avec la notation $(\,|\,)$ pour le produit scalaire usuel :
$f(a + \overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h} \to 0}{=} f(a) + \left\langle \nabla f(a) | \overrightarrow{h} \right\rangle + o\left(\left\| \overrightarrow{h} \right\|_2 \right)$

Remarque 1. Interprétation : le gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ définit la direction dans laquelle f croît le plus vite (ligne de plus grande pente sur la surface correspondante).

I.5 Dérivées partielles et composées

5.a) Dérivée selon un vecteur

Définition 4.

Soient $a = (x_0, y_0)$ un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f admet une dérivée suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ en a, notée $D_{\overrightarrow{v}} f(a)$ lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \to 0 t \neq 0} \frac{f(a + t\overrightarrow{v}) - f(a)}{t}$$

Remarque 2. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{U}$, donc pour t tel que $t\|\overrightarrow{v}\| < r$, $a + t\overrightarrow{v}\mathcal{U}$
L'existence de $D_{\overrightarrow{v}} f(a)$ est équivalente à la dérivabilité en 0 de l'application $\varphi_{\overrightarrow{v}} : t \longmapsto f(a + t\overrightarrow{v})$.

Proposition 6.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a=(x_0,y_0)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{v}$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a avec la notation $<\ |\ >$ pour le produit scalaire usuel :
$D_{\overrightarrow{v}}f(a)=\left\langle\nabla f(a)|\overrightarrow{h}\right\rangle$

dém : $\overrightarrow{h}=t\overrightarrow{v}$ on simplifie par t. $\square$.

5.b) Règle de la chaîne

Proposition 7 (règle de la chaîne)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle ouvert, x,y des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$ telles que $\{\gamma(t)=(x(t),y(t));t\in I\}\subset\mathcal{U}$, $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors $t\mapsto f(x(t),y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t\in I$, on a :
$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x(t),y(t))\right)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t))\times\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t))\times\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)$

démonstration : On a pour tout $i\in[\![1,p]\!]$:

$$x_i(t+h)=x_i(t)+hx_i'(t)+h\varepsilon_i(h),\ \text{avec}\ \lim_{h\to0}\varepsilon_i(h)=0 \tag{5}$$

et pour $a=(x_1(t),\dots,x_p(t))$ et $\delta=(\delta_1,\dots,\delta_p)=(hx_i'(t)+h\varepsilon_i(h))_{1\le i\le p}$:

$$f(a+\delta)=f(a)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\,\delta_i \tag{6}$$

Donc $\dfrac{1}{h}\left(f(x(t+h))-f(x(t))\right)=\displaystyle\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)+\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\varepsilon_i(h)\xrightarrow[h\to0]{}\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)$. $\square$

Remarque 3. En physique, on note $V=f\circ\gamma$ et la dérivée par rapport à t est $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial V}{\partial x_1}x_1'(t)+\cdots+\dfrac{\partial V}{\partial x_p}x_p'(t)}$.

Remarque 4. Interprétation : en physique cela correspond à la dérivation de f le long de l'arc γ donné par $\gamma(t)=(x(t),y(t))$.
$f\circ\gamma'(t)=\langle\nabla f(a)|\gamma'(t)\rangle$ où le vecteur vitesse est $\gamma'(t)=(x'(t),y'(t))$

Proposition 8 (dérivée partielles de fonctions composées)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\Phi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathcal{V},\ (u,v)\longmapsto(\varphi(u,v),\psi(u,v))$
et $f:\mathcal{V}\longrightarrow\mathbb{R},\ (x,y)\longmapsto f(x,y)$, et $g=f\circ\Phi:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R},\ (u,v)\longmapsto f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On a
$\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}(u,v)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\times\dfrac{\partial\psi}{\partial u}(u,v)$
et
$\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\times\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(u,v)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v),\psi(u,v))\times\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(u,v)$

Remarque 5. En physique : $x = \varphi(u,v)$ et $y = \psi(u,v)$ et :
« $\dfrac{\partial g}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x} \times \dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \times \dfrac{\partial y}{\partial u}$ »

5.c) Lignes de niveau planes

Définition 5.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane, paramétrée par $\gamma \; : \; t \; \longmapsto \; (x(t), y(t))$ alors la tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Proposition 9 (le gradient est orthogonal aux lignes de niveau)**.**

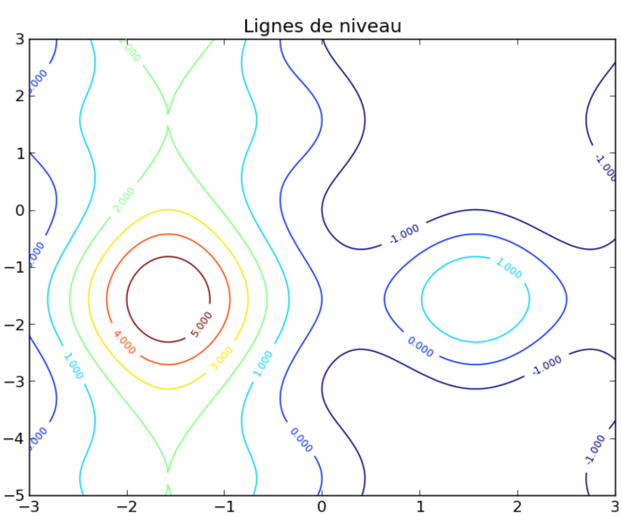
Si $\mathcal{L}_K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ;\ f(x,y) = K\}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x,y) = K$, pour $K \in \mathbb{R}$ constante fixée, alors pourtout point M de $\mathcal{C}$, et pour tout vecteur $\overrightarrow{T}_M$ tangent à la courbe en M, on a $\nabla f(M) \perp \overrightarrow{T}_M$.

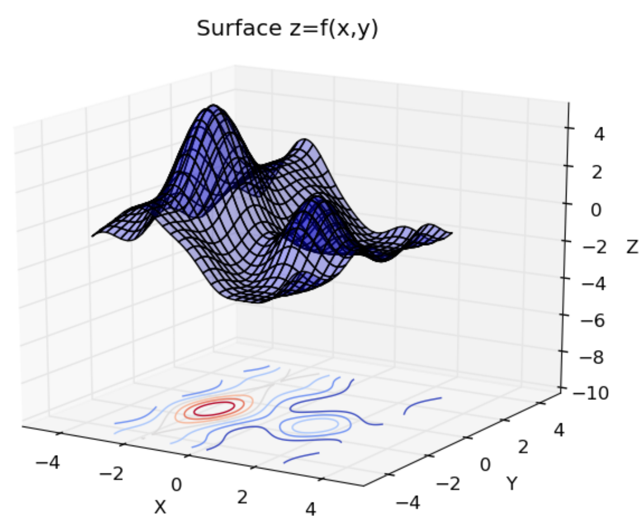
démonstration : On peut paramétrer la ligne de niveau K par : $\mathcal{L}_K = \{(x(t), y(t)) ;\ t \in I\}$, pour un intervalle réel I, et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

Comme pour tout $t \in I$, $K = f(x(t), y(t))$, en dérivant on obtient :
$0 = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t)$,
d'où $< \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \overrightarrow{OM(t)} \cdot \nabla f(M) >= 0$, le vecteur vitesse $\overrightarrow{T}_M$ étant le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ $\square$

Remarque 6. En physique, on dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau (équipotentielles), et orienté selon les valeurs croissantes de f, en tout point où il est non nul.

exemple 1. $z = f(x,y) = -2 + (1 - \sin(x))^2 + (\sin(y) - \sin(x)^2)^2$





Remarque 7. Pour un relief paramétré par $z = f(x, y)$, le vecteur $\nabla f((x, y))$ dirige la plus grande pente au point $M(x, y, f(x, y))$ de la surface : en effet, la variation de $f(x(t), y(t)) - f(x_M, y_M)$ est maximale lorsque le terme d'ordre $1 < \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{OM(t)} \cdot \nabla f(x_M, y_M) >$ est maximal, ce qui correspond au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

I.6 Extremums

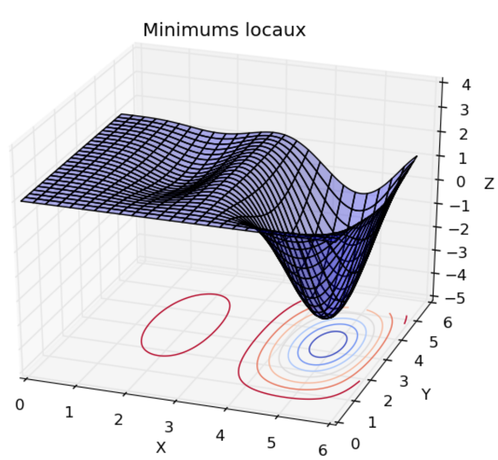
6.a) Extremums locaux ou globaux

Définition 6.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.
On dit que f admet un **minimum**, resp. maximum) **local** en a, s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :
$\forall x \in \mathcal{U},\ \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)
Si f admet un maximum ou un minimum local en a , on dit que f admet un extremum local.

Définition 7.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.
On dit que f admet un **minimum global** (resp. **maximum global**) en a, si :
$\forall x \in \mathcal{U}, f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)
Si f admet un maximum ou un minimum global en a , on dit que f admet un extremum global.



$f : (x, y) \mapsto 2 - 1/4\sin(y/2)^2(x\sin(x))^2$ n'a pas de minimum global (elle tend vers $-\infty$ le long de la suite de points $M_n = (n\pi/2, \pi)$, mais a pour maximum global la valeur 2 atteinte en les $(k\pi, 2\ell\pi)$ pour k, ℓ entiers.

Définition 8 (point critique)**.**

Soit $a \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On dit que $a = (x_0, y_0)$ est un **point critique** de f si :
$\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 0}$

Remarque 8. c.à.d. a critique ssi $\nabla f(a) = \overrightarrow{0}$

Proposition 10.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum en a, alors a est un point critique.

démonstration : Dans le cas d'un maximum local (a fortiori dans le cas d'un maximum global) : nécessairement, pour $i \in [\![1, p]\!]$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(a + t\overrightarrow{e_i}) \leq f(a)$.

Mais alors, la fonction $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + t\overrightarrow{e_i})$ est une fonction dérivable, qui admet un maximum en 0, donc $\varphi'(0) = 0$. On en déduit que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(a + t\overrightarrow{e_i})_{|t=0} = 0$, ce qui revient à dire que $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Remarque 9. En pratique, lorsque l'on cherche à déterminer le maximum d'une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie fermée bornée D du plan :
• On cherche le maximum m_b sur son bord $\partial\mathrm{D}$ (il est atteint, car f est continue sur le fermé borné $\partial\mathrm{D}$).
• On recherche d'éventuels points critiques sur l'intérieur $int(\mathrm{D})$.
• S'il n'y en a pas, la borne supérieure est réalisée au bord, et elle est atteinte, c'est un maximum.
• S'il y en a, on compare le maximum au bord, avec les valeurs en les points critiques.

II. Dérivation des fonctions vectorielles de la variable réelle.

II.1 Définition

Définition 9.

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}^n$.

On dit que $f : I \to \mathbb{R}^n,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est **dérivable** en t_0 si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(t_0+h) - f(t_0)\right)$$

Si tel est le cas, on note $f'(t_0)$ la valeur de cette limite, appelée **vecteur dérivé de f en t_0**.

De plus , si cela est vrai en tout point t_0 de I on dit que f est dérivable sur I et on note f' sa fonction dérivée.

Proposition 11 (DL1 vectoriel)**.**

Si $f : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dérivable en t_0, alors :

$$f(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} f(t_0) + hf'(t_0) + \overrightarrow{o}(h)$$

où $f'(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}(f(t_0+h) - f(t_0))$

démonstration :

On sait que $x_i(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} x_i(t_0) + hx_i'(t_0) + o(h)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

donc vectoriellement : $\begin{pmatrix} x_1(t_0+h) \\ \vdots \\ x_n(t_0+h) \end{pmatrix} \underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x_1'(t_0) \\ \vdots \\ x_n'(t_0) \end{pmatrix} + \overrightarrow{o}(h)$

puis $\dfrac{1}{h}(X(t_0+h) - X(t_0)) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{h}(x_1(t_0+h) - x_1(t_0)) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{h}(x_n(t_0+h) - x_n(t_0)) \end{pmatrix} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} X'(t_0)$ □

Proposition 12 (vecteur dérivé)**.**

On dit qu'une application vectorielle $X : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est **dérivable** si et seulement si ses applications coordonnées $x_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont dérivables, pour $1 \leq i \leq n$.
Si tel est le cas, on note $X' : \mathbb{R} \to \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ t \longmapsto \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix}$ sa dérivée vectorielle.

Remarque 10. On a (comme pour les fonctions réelles de la variable réelle) équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.

Remarque 11. Intéreprétation physique : vecteur vitesse

Définition 10 (classe $\mathcal{C}^k$)**.**

Lorsque f' est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ comme pour les fonctions à valeurs réelles, et cela est équivalent à avoir des fonctions composantes de classe $\mathcal{C}^k$.

II.2 Propriétés

2.a) Dérivation et linéarité

Proposition 13 (dérivation et linéarité)**.**

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable sur I.
Alors $g = L \circ f : t \longmapsto L(f(t))$ est dérivable sur I et
$\boxed{\forall t \in I,\ g'(t) = (L \circ f)'(t) = L(f'(t))}$

démonstration :
$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \varepsilon_h$, donc $\dfrac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) = f'(t) + \varepsilon_h \underset{h \to 0}{\longrightarrow} f'(t)$
Ainsi
$\dfrac{1}{h}(L \circ f(t+h) - L \circ f(t)) \underset{lin}{=} L\left(\dfrac{1}{h}(f(t+h) - f(t))\right) = L(f'(t) + \varepsilon_h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} L(f'(t))$
car toute application linéaire est continue puisque lipschitzienne□

2.b) Dérivation et linéarité

Proposition 14.

Soient E, F euclidiens, $f, g : I \to E$ dérivable, et $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Alors $B(f,g) : I \to F,\ t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I,\ (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

démonstration non exigible $\dfrac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) = \dfrac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t+h))) + \dfrac{1}{h}(B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) \underset{bilin}{=} B(\dfrac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), g(t+h)) + B(f(t), \dfrac{1}{h}(g(t+h) - g(t))) \xrightarrow[h\to 0]{} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

car toute application bilinéaire est continue et car $\dfrac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(t)$ et $\dfrac{1}{h}(g(t+h) - g(t)) \xrightarrow[h\to 0]{} g'(t)$.
□

exemple 2 (Produit scalaire)**.**
Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto < f(t)|g(t) >$ est dérivable de dérivée $t \mapsto < f'(t)|g(t) > + < f(t)|g'(t) >$ $= 2 < f'(t)|g(t) >$

exemple 3 (Trajectoire orthoradiale)**.**
Si $f : I \to \mathbb{R}^2$ est tel que : $\forall t \in I,\ f(t) \perp f'(t)$, alors $t \mapsto \|f(t)\|^2 = < f(t)|f(t) >$ est constante : le mouvement est circulaire !

exemple 4. Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable
de dérivée $t \mapsto \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$

2.c) Dérivation et p-linéarité

Proposition 15.

Soient M p-linéaire et $f_1, \ldots, f_p$ dérivables.
Alors $M(f_1, \ldots, f_p)$ est dérivable et

$$\forall t \in I,\ (M(f_1, \ldots, f_p))'(t) = \sum_{k=1}^{p} M(f_1(t), \ldots, f_{k-1}(t), f_k'(t), f_{k+1}(t), \ldots, f_p(t))$$

démonstration non exigible
Application au déterminant d'une famille de n vecteurs colonnes.

2.d) Dérivation et composée

Proposition 16.

Soient I, J deux intervalles réels, E euclidien, $\overrightarrow{f} : I \to E$ dérivable et $\varphi : J \to I$ dérivable.
Alors $\overrightarrow{f} \circ \varphi : J \to E,\ t \mapsto \overrightarrow{f}(\varphi(t))$ est dérivable sur J, et :

$$\forall s \in J,\ (\overrightarrow{f}(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s)\ \overrightarrow{f}'(\varphi(s))$$

démonstration :

$$\frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f}\circ\varphi(t+h)-\overrightarrow{f}\circ\varphi(t)\right)\underset{DL1}{=}\frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f}(\varphi(t)+h\varphi'(t)+o(h))-\overrightarrow{f}(\varphi(t)\right)$$

$$\underset{DL1}{=}\frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f}(\varphi(t))+(h\varphi'(t)+o(h))\overrightarrow{f}'(\varphi(t))+\overrightarrow{o}(h\varphi'(t)+o(h))-\overrightarrow{f}(\varphi(t)\right)$$

$$=\frac{1}{h}\left((h\varphi'(t)+o(h))\overrightarrow{f}'(\varphi(t))+\overrightarrow{o}(h\varphi'(t)+o(h))\right)$$

$$=\varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t))+o(1)\overrightarrow{f}'(\varphi(t))+\overrightarrow{o}(\varphi'(t)+o(1))=\varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t))+\overrightarrow{o}(1)\underset{h\to 0}{\longrightarrow}\varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t))\quad\square$$

Remarque 12. En physique on peut changer d'échelle de temps.

III. Fonctions de p variables

Cadre $p=2$ ou $p=3$ On considère des fonctions $f:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^n$, avec $n\in\{1,2,3\}$.
On note $\mathcal{B}=(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

III.1 Dérivées partielles

Définition 11.

Soient a un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, $\overrightarrow{v}=$ un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^p$ et $f:\mathcal{U}\longrightarrow\mathbb{R}$.
On dit que f admet une dérivée suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ en a, notée $D_{\overrightarrow{v}}f(a)$ lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t\to 0 t\neq 0}\frac{f(a+t\overrightarrow{v})-f(a)}{t}$$

Remarque 13. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset\mathcal{U}$, donc pour t tel que $t\|\overrightarrow{v}\|<r$, $a+t\overrightarrow{v}\mathcal{U}$
L'existence de $D_{\overrightarrow{v}}f(a)$ est équivalente à la dérivabilité en 0 de l'application $\varphi_{\overrightarrow{v}}:t\longmapsto f(a+t\overrightarrow{v})$.

Définition 12.

Soient a un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ et $i\in[\![1,p]\!]$.
On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en a par rapport à sa $i$ème coordonnée si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t\to 0 t\neq 0}\frac{f(a+t\overrightarrow{e_i})-f(a)}{t}$$

Si tel est le cas, on note $\partial_i f(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la valeur de cette limite finie $D_{\overrightarrow{e_i}}f(a)$, appelée dérivée partielle d'ordre 1 en a par rapport à sa $i$ème coordonnée.

Définition 13.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E. Une application $f:E\to\mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si ses applications dérivées partielles $u\mapsto\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(u)$, pour $j\in[\![1,p]\!]$, existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Notation 2. *On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 14. On généralise la notation à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R}^n)$ pour des fonctions à valeurs vectorielles dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$

Corollaire 17.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U},\mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 18.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

III.2 DL1, gradient, différentielle

Proposition 19 (D.L. d'ordre 1 et somme)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a=(a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a)+\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)+o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$$

Définition 14.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle (vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(a)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(a)\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_3}(a)\end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Proposition 20 (D.L. d'ordre 1 et gradient)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a=(a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f\in\mathcal{C}^1(\mathcal{U},\mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a avec la notation $(\ |\ )$ pour le produit scalaire usuel :

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a)+\left\langle \nabla f(a) | \overrightarrow{h}\right\rangle+o\left(\|\overrightarrow{h}\|_2\right)$$

Définition 15.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle **différentielle** de f en a l'application linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, noté $\mathrm{d}f(a)$, définie par :

$$\mathrm{d}f(a) : (h_1, \dots, h_p) \longmapsto \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Notation 3. *Le terme* $\sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ *est parfois noté* $\mathrm{d}f(a) \bullet \overrightarrow{h}$ *et est égal à* $(\nabla f(a) | \overrightarrow{h})$.

Remarque 15. En physique, pour une fonction $(p, T) \mapsto S(p, T)$, on écrit parfois « $\mathrm{d}S = \frac{\partial S}{\partial p}\mathrm{d}p + \frac{\partial S}{\partial T}\mathrm{d}T$ » pour désigner l'approximation à l'ordre 1 :

$$S(p_0 + \delta p, T_0 + \delta T) - S(p_0, T_0) \underset{\delta \to 0, \delta p \to 0}{=} \frac{\partial S}{\partial p}(p_0, T_0)\delta p + \frac{\partial S}{\partial T}(p_0, T_0)\delta T + o(\sqrt{\delta p^2 + \delta T^2})$$

Proposition 21 (D.L. d'ordre 1 et différentielle)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\overrightarrow{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f(a + \overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h} \to 0}{=} f(a) + \mathrm{d}f(a) \bullet \overrightarrow{h} + o\left(\| \overrightarrow{h} \|_2\right)$$

III.3 Règle de la chaîne

Proposition 22 (règle de la chaîne)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle ouvert, $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\{x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)); t \in I\} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(f(x_1(t), \dots, x_p(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t))\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t))\frac{\mathrm{d}x_p}{\mathrm{d}t}(t)$$

démonstration : On a pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$x_i(t + h) = x_i(t) + hx_i'(t) + h\varepsilon_i(h), \text{ avec } \lim_{h \to 0} \varepsilon_i(h) = 0 \quad (7)$$

et pour $a = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (hx_i'(t) + h\varepsilon_i(h))_{1 \leq i \leq p}$:

$$f(a + \delta) = f(a) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, \delta_i \quad (8)$$

Donc $\frac{1}{h}\left(f(x(t + h)) - f(x(t))\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t) + \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\varepsilon_i(h) \xrightarrow[h \to 0]{} \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x_i'(t)$. □

Remarque 16. En physique, on note $V = f \circ x$ et la dérivée par rapport à t est $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial V}{\partial x_1} x_1'(t) + \cdots + \dfrac{\partial V}{\partial x_p} x_p'(t)}$.

Proposition 23 (fonctions constantes)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
Alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses dérivées partielles premières sont nulles sur $\mathcal{U}$.

démonstration : pour tout chemin, $0 = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(a) \cdots \gamma'(t)$ donc le gradient est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ donc est le vecteur nul.

□

Proposition 24 (dérivée partielles de fonctions composées)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V},\ (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$
et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$, et $g = f \circ \varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R},\ (u,v) \longmapsto f(x(u,v), y(u,v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.
On a
$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v)$$
et
$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v)$$

Proposition 25 (utilisation des coordonnées polaires)**.**

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0,0)$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,
$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V},\ (\rho,\theta) \longmapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$
et $f : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto f(x,y)$, et $g : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R},\ (\rho,\theta) \longmapsto f((\rho\cos\theta, \rho\sin\theta))$
On a
$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \times \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \times \sin\theta$$
$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \times (-\rho\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \times \rho\cos\theta$$

démonstration : on compose les D.L. d'ordre 1.

Remarque 17. En physique, pour une fonction $(x,y) \mapsto V(x,y)$, on écrit parfois « $\dfrac{\partial V}{\partial \rho} = \dfrac{\partial V}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial \rho} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial \rho}$ »
pour désigner : $\dfrac{\partial V \circ \varphi}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \dfrac{\partial V}{\partial x}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \times \dfrac{\partial x}{\partial \rho}(\rho,\theta) + \dfrac{\partial V}{\partial y}(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta)) \times \dfrac{\partial y}{\partial \rho}(\rho,\theta)$

III.4 La classe $\mathcal{C}^2$

4.a) Définition

Définition 16.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Notation 4. *Dans le cas d'un application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}x(a+h\overrightarrow{e_i}) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1,,a_2,a_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(a)$$

On rencontre aussi la notation $\partial^2_{ij} f$ pour désigner $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, et les notations :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial y}x(a_1+h,a_2,a_3) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1,,a_2,a_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\partial f}{\partial x}x(a_1+h,a_2,a_3) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1,,a_2,a_3)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$$

etc...

4.b) Matrice hessienne

Théorème 26 (De Schwarz)**.**

Si $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors pour tous $i, j \in [\![1,3]\!]$, et tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

[ADMIS]

Définition 17.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
On appelle matrice hessienne de f en $a \in \mathcal{U}$ la matrice symétrique réelle notée $H_f(a)$ définie par

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{1\le i\le p, 1\le j\le p}$$

Remarque 18. Matrice symétrique par Schwarz

4.c) DL2

Proposition 27 (D.L. d'ordre 2 et somme)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1\leq i\leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\, h_k + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\, h_i h_j + o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|_2^2\right)$$

démonstration (HP) :
Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$f(a_1+h_1, a_2) \underset{h_1\to 0}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + o(h_1^2) \tag{9}$$

et

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f(a_1+h_1, a_2) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2) + \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1+h_1, a_2) + o(h_2^2) \tag{10}$$

Or par classe C^1 de $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1+h_1, a_2) \underset{h_1\to 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_1\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + o(h_1^2) \tag{11}$$

Mais alors, d'après (9), (10), (11), on a

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{h_1^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + h_1h_2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}(a) + \frac{h_2^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2+h_2^2}^{\,2}\right) \tag{12}$$

cest à dire

$$f(a_1+h_1, a_2+h_2) \underset{h_2\to 0}{=} f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{1}{2}\sum_{1\leq i,j\leq 2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a)\, h_i h_j + o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|_2^2\right) \tag{13}$$

Remarque 19. Pour $h \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vecteur colonne, $h^T \times H_f(a) \times h = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j\right)_{1\leq i\leq p, 1\leq j\leq p}$

Proposition 28 (D.L. d'ordre 2 gradient et hessienne)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a+\overrightarrow{h}) \underset{\overrightarrow{h}\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T \times h + \frac{1}{2} h^T \times H_f(a) \times h + o\left(\left\|\overrightarrow{h}\right\|_2^2\right)$$

III.5 Extremums

On sait déjà pour les fonctions de plusieurs variables qu'une condition nécéssaire d'extremum est d'être point critique, on peut préciser une C.N.s. pour la classe $\mathcal{C}^2$:

Proposition 29 (CNS minimum et hessienne)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
Alors
f admet un minimum local en a si et seulement si : a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

f admet un minimum local strict en a si et seulement si :
a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

dém en diagonalisant via le thé spectral $h^T H_f h = h^T PDP^T h = v^T Dv = \sum_{k=1}^{p} d_k v_k^2$. Le signe est positif ssi D est à valeurs propres positives; Le signe est strictement positif pour tout v non nul ssi D est à valeurs propres strictement positives; □

Corollaire 30 (fonction de 2 variables et hessienne)**.**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un point critique de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
Alors
Si $\det(H_f(a)) < 0$, f n'a pas d'extremum en a
Si $\det(H_f(a)) \geq 0$, f possède un extremum en a et de plus :
- si $\mathrm{tr}(H_f(a)) > 0$ alors il s'agit d'un minimum local strict
- si $\mathrm{tr}(H_f(a)) < 0$ alors il s'agit d'un maximum local strict

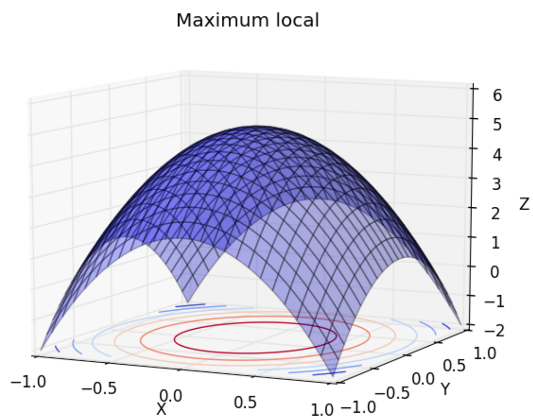
dém$\det(H_f(a)) = \lambda_1\lambda_2$

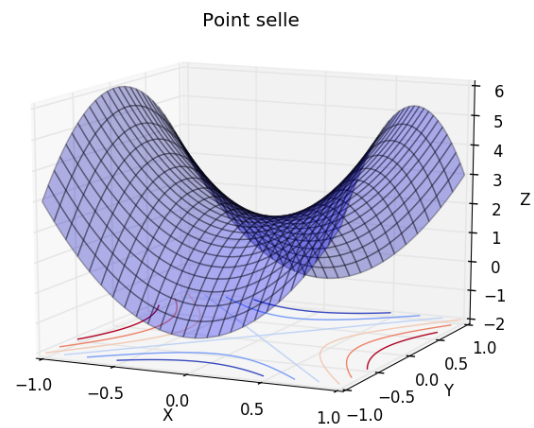
$\mathrm{tr}(H_f(a)) = \lambda_1 + \lambda_2$, le polynôme caractéristique est $(X - \lambda_1)(X - \lambda_2)$.

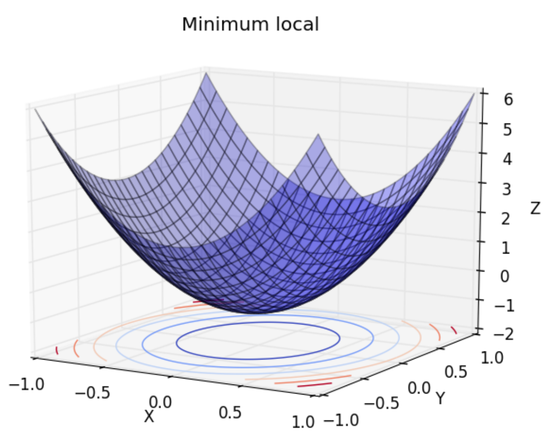
Si les valeurs propres sont non nulles de signes contraires il n'y a pas d'extremum; si elles sont non nulles et de même signe, soit elles sont toutes deux positives et $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^+$(minimum local), soit elles sont toutes deux négatives et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_2^+$ (maximum local). En outre, si les valeurs propres sont strictement positives $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}$ et il s'agit d'un minimum local strict.

f admet un minimum local en a si et seulement si : a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

f admet un minimum local strict en a si et seulement si :
a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.


Maximum local
Z
X
Y


Point selle
Z
X
Y


Minimum local
Z
X
Y