Table des matières

Pré-requis

Objectifs

Calculer les espérances et variances de variables aléatoires.

I. Variables aléatoires

I.1 Variables aléatoires discrètes

1.a) Définition

Définition 1 (variable aléatoire discrète à valeurs réelles)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable.
Une variable aléatoire discrète réelle X est une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur Ω, telle que : i) $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ii) pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}$ est un événement de la tribu $\mathcal{A}$.

Remarque 1. L'univers Ω n'est en général pas explicité.

Remarque 2. On peut même considérer des variables aléatoires à valeurs dans F un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

Par exemple, la variable alétaoire à valeurs dans $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ valant $X(0) = I_2$ avec probbilité $X(1) = -2I_2$, sur l'univers $\omega = \{0, 1\}$

Notation 1. *Pour $x \in X(\Omega)$, on note $(X = x)$ ou* $\boxed{\{X = x\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x\}} = X^{-1}(\{x\})$

Notation 2. *Pour $A \in \mathcal{A}$, on note $(X \in A)$ ou* $\boxed{\{X \in A\} = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \in A\}} = X^{-1}(\{A\})$

Notation 3. *Pour $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, et $x \in \mathbb{R}$, on note* $(X \geqslant x) = \{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \geq x\} = X^{-1}(\{[x, +\infty[\})$

1.b) Loi d'une variable aléatoire discrète

Définition 2 (Loi d'une variable aléatoire discrète)**.**

Si X est une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, **la loi de** X est la donnée des $\mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\})$ pour $k \in X(\Omega)$.
On la note $\mathbf{P}_X$, et on peut la définir comme suit :

$$\forall k \in X(\Omega),\ \mathbf{P}_X(\{k\}) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = k\}) = \mathbf{P}(X^{-1}(\{k\})) = \mathbf{P}(\{X = k\})$$

Remarque 3. $\mathbf{P}_X$ est une loi de probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

exemple 1. Pour $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ muni de la loi uniforme $\mathbf{P}$ et de la tribu $\mathcal{A}$ contenant tous les singletons “couples” $\{(\omega_1, \omega_2)\}$, $S : (\omega_1, \omega_2) \mapsto \omega_1 + \omega_2$

La loi $\mathbf{P}_S$ de S est donnée par :$\forall k \in [\![2, 12]\!],\ \mathbf{P}_S(k) = \dfrac{\#\{(i,j) \in [\![1, 6]\!]^2;\ i + j = k\}}{36}$

Remarque 4 (**IMPORTANT**). La loi de probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Cette distributin est dénombrable, on peut lui associer une suite p_n de valeurs de probabilités en posant $X(\Omega) = \{x_n; n \in I\}$ et $p_n = \mathbf{P}(X = x_n)$ pour des x_n deux à deux distincts.

On a alors $1 = \mathbf{P}(\Omega) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(X = x) = \sum_{n \in I} p_n$

I.2 Lois usuelles

2.a) rappel : loi de Bernoulli de paramètre p

Définition 3.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi de Bernoulli de paramètre p, ce que l'on note $X \sim b(p)$ si :
$X(\Omega) = \{0,1\}$ et si $\mathbf{P}(X=0) = (1-p)$ et $\mathbf{P}(X=1) = p$

Expérience aléatoire : On tire une pièce de monnaie (équilibrée ou pipée), avec 1 le succès Face, 0 l'échec Pile.

2.b) rappel : loi uniforme sur $[\![1,N]\!]$

Définition 4.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{1,\dots N\}$ ce que l'on note $X \sim Unif([\![1,N]\!])$ si :
$X(\Omega) = [\![1,N]\!]$ et si $\mathbf{P}(X=j) = \dfrac{1}{N}$, $\forall j \in [\![1,N]\!]$.

Expérience aléatoire : tirage équiprobable dans une urne contenant N jetons numérotés de 1 à N.

2.c) rappel : loi binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$

Définition 5.

Soient $p \in]0,1[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la loi binomiale de paramètres N et p, ce que l'on note $X \sim B(N,p)$ si :
$X(\Omega) = [\![0,N]\!]$ et si $\mathbf{P}(X=k) = \dbinom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k$, $\forall k \in [\![0,N]\!]$

Expérience aléatoire : On compte les succès (Face) en N tentatives simultanées et indépendantes de lancers de pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité p, 0 l'échec Pile de probabilité $1-p$.

2.d) Loi Géométrique de paramètre p

Définition 6.

Soit $p \in]0,1[$. On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p, ce que l'on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si :
$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$

Remarque 5. $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(1-p)^{k-1}p$

Remarque 6. Interprétation en termes de répétition : $[X=k]$ représente la réalisation d'un premier succès lors de la répétition indépendante d'épreuves de Bernoulli de même loi $b(p)$.

Expérience aléatoire : On répète des tirages successifs indépendants d'une pièce, en notant 1 le succès Face de probabilité p, 0 l'échec Pile de probabilité $1-p$, jusqu'à obtenir un premier succès (Face), et on compte le nombre de tirages nécessaires.

Proposition 1.

Si $X \sim \mathcal{G}(p)$, alors $\mathbf{P}(X > k) = (1-p)^k,\ \forall k \geq 1$.

dém $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{+\infty} p(1-p)^{j-1} = p\frac{(1-p)^k-}{1-(1-p)} = (1-p)^k$

2.e) Loi de Poisson de paramètre λ

Définition 7.

Soit $\lambda > 0$. On dit que X suit la loi de Poisson de paramètre λ, ce que l'on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si :
$X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}(X = k) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$

Remarque 7. $1 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$

Remarque 8. Interprétation en termes d'événements rares : si on considère une expérience répétée un très grand nombre de fois N, avec une probabilité de succès p_N faible et X la variable comptant le nombre de succès, alors X suit approximativement la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ lorsque $Np_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda$.

C'est ce qu'on appelle l'approximation binomiale-Poisson (exercice)

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})\ \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!}\prod_{i=1}^{k-1}(1-\frac{i}{n})\ \times e^{n\ln(1-np/n)}\ \times e^{-k\ln(1-np/n)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times 1 \times e^{-\lambda} \times 1 \quad \square$$

exemple 2. Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. On a $np = 2$ et les conditions d'approximation ($np(1-p) \leq 10$) par une loi de Poisson sont réalisées, en posant $\lambda = np = 2$. Soit m la probabilité cherchée ; avec les notations ci-dessus, on a :

$\mathbf{P}(X = k) = e^{-2\times 2k}/k!$, donc $1 - m \approx \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = 0,406$, soit : $m \approx 0,6$

L'application (peu pratique) de la loi binomiale aurait fourni $1 - m = (0,98)100 + 2(0,98)99 \approx 0,403$. Soit $m \approx 0,597$. L'approximation est donc ici excellente.

II. Espérance

II.1 Espérance

Définition 8.

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable est dite d'**espérance finie** si la famille $(x\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
Si tel est la cas, on appelle **espérance** de X, notée $\mathbb{E}[X]$ la valeur réelle définie par : $\boxed{\mathbb{E}[X]=\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbf{P}(X=x)}$.

Remarque 9. Pour X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
$\sum_{n\geq 0} x_n\mathbf{P}(X=x_n)$ CV ssi $\sum_{n\geq 0}|x_n|\mathbf{P}(X=x_n)$ ssi $(x\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ sommable.

Proposition 2.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a : $\mathbb{E}[X]=\frac{1}{p}$
Pour Y de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\mathbb{E}[Y]=\lambda$

dém :
Si $X\hookrightarrow\mathcal{G}(p)$, alors par dérivation terme à terme sur $]-1,1[$:

$$\mathbb{E}[X]=\sum_{k=1}^{+\infty}kp(1-p)^{k-1}=p\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)\right]_{x=1-p}=p\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]_{x=1-p}=p\left[\frac{1-x+x}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p}=\frac{p}{p^2}=\boxed{\frac{1}{p}}.$$

Si $Y\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$, alors par changement d'indice :

$$\mathbb{E}[Y]=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^{k-1}\lambda e^{-\lambda}}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\frac{\lambda^\ell}{\ell!}=\lambda e^{-\lambda}e^{\lambda}=\boxed{\lambda}.$$

□

II.2 Loi image, théorème du transfert

Notation 4. *On note $X\sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.*

Définition 9 (Loi d'une variable aléatoire image)**.**

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une application, et si X est une variable alétoire discrète réelle sur $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, alors on définit une variable aléatoire notée $f(X)$ en posant :

$$\forall\omega\in\Omega, f(X)(\omega)=f(X(\omega))$$

exemple 3. $X \sim b(p)$, $f : x \mapsto 2x-1$, on vérifie que $f(X)(\Omega) = \{-1,1\}$, $\mathbf{P}(f(X)=1) = \mathbf{P}(X=1) = p$ et $\mathbf{P}(f(X)=-1) = \mathbf{P}(X=-1) = 1-p$

Proposition 3.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Théorème 4 (Théorème du transfert :)**.**

si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = x_n)\ f(x_n).$$

Démonstration hors programme, idée : pour une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la formule est vraie. Puis toute fonction f continue sur un segment est limite uniforme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices...

II.3 Propriétés de l'espérance

Proposition 5 (Positivité de l'espérance)**.**

Si X variable aléatoire réelle telle que $X \geq 0$

$$\mathbb{E}[X] \geq 0$$

Proposition 6 (Croissance de l'espérance)**.**

Si X, Y variables aléatoires réelles telle que $X \leq Y$

$$\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$$

Proposition 7 (Linéarité de l'espérance)**.**

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\, \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration non exigible.

idée : immédiat pour des variables à espaces de valeurs finis, se généralise aux v.a. discrètes quelconques.

en notant $\{(\omega_k)_{1\leq k\leq K}\}$ un système complet d'évènements tel que $p_k = \mathbf{P}_{(X,Y)}(x_k, y_k) = \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_k, y_k)\})$ avec $X(\Omega) = \{x_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $N \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints) et $Y(\Omega) = \{y_k,\ 1 \leq k \leq K\}$ de cardinal $M \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints),

$$\sum_{k=1}^{N}(\lambda x_k + y_k)p_k = \sum_{k=1}^{N}\lambda x_k p_k + \sum_{k=1}^{N} y_k p_k$$

idée cas général : On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i, y_j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire couple (X,Y), avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j \in \mathbb{N}\}$, et on note $p_n = \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme X est d'espérance finie, la série $\sum_i x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\})$ converge absolument, et sa somme vaut, en utilisant les lois marginales, et le théorème de transfert pour $f : (x,y) \longmapsto x$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f((x_i,y_j))\mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\})$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(C_n)\,\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$$

De même pour $g : (x,y) \longmapsto y$: $\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\,\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda f(C_n) + g(C_n)| \leq |\lambda|\,|f(C_n)| + |g(C_n)|$,
la série $\sum \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda f(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n\})$$

Donc d'après le théorème de transfert $\lambda X + Y = \lambda f((X,Y)) + g((X,Y))$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\,\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \square$$

Proposition 8.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X,Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

Proposition 9.

Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X \geqslant n)$.

dém : on découpe et on intervertit les sommes convergentes

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\,\mathbf{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{k}\mathbf{P}(X=k)\right)$$
$$\underset{\text{somme série positive}}{=} \sum_{1\leq n\leq k}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k) \underset{interversion}{=} \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=n}^{+\infty}\mathbf{P}(X=k)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbf{P}(X\geqslant n).\square$$

III. Variance

III.1 Définition

Proposition 10.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
i.e. : Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe.

idée Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{N} x_n p_n = \sum_{n=0}^{N} x_n\sqrt{p_n}\times\sqrt{p_n} \underset{C.-S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} x_n^2\sqrt{p_n}^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N}\sqrt{p_n}^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 p_n}\,\square$$

marche encore si X discrète quelconque...

Proposition 11.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $m=\mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{E}[(X-m)^2]$.
De plus $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Démonstration : $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

$\mathbb{E}[m^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} m^2 p_n = m^2$ existe par transfert via $f : x \longmapsto m^2x^0$ ou via v.a.r. constante.

DOnc par linéarité $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[m^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2.\square$ (formule de Koenig).

Définition 10.

Si X^2 est d'espérance finie, la **variance** de X est le réel
$\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$.

Proposition 12.

Soit X v.a. à valeurs discrète admettant une variance et une espérance. Alors $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$

idée Démonstration : linéarité
$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right)=\mathbb{E}\left(X^2-2\mathbb{E}(X)X+(\mathbb{E}(X))^2\right)=\mathbb{E}(X^2)-2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2)$ $\square$

Proposition 13.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a : $\mathbb{V}[X]=\dfrac{1-p}{p^2}$
Pour Y de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a : $\mathbb{V}[Y]=\lambda$

dém : cf : séries génératrices
$\square$

III.2 Propriétés de la variance

Proposition 14.

Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, on a $\boxed{\mathbb{V}(aX+b)=a^2\,\mathbb{V}(X)}$

démonstration : Calcul direct :
$\mathbb{E}(aX+b)=a\,\mathbb{E}(X)+b$, donc $\mathbb{E}((aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2)=\mathbb{E}((a(X-\mathbb{E}(X)))^2)=a^2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$. $\square$

exemple 4. Pour $S_N=\displaystyle\sum_{k=1}^{N}X_k$ de loi $\mathcal{B}(N,p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N)=\sum_{k=1}^{N}\mathbb{V}(X_k)=Np(1-p)$$

exemple 5. Pour S_N de loi $\mathcal{B}(N,p)$, $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{N}S_N\right)=\dfrac{1}{N^2}\mathbb{V}(S_N)=\dfrac{p(1-p)}{N}$

IV. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

IV.1 fonction génératrice

Définition 11 (fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$)**.**

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice la fonction G_X définie par :

$$G_X(t)=\mathbb{E}(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbf{P}(X=n)\,t^n$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Remarque 10. La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

en effet, le r.c.v. est > 0 donc par unicité du DSE, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}[X = n] = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 15.

G_X CVN sur $[-1, 1]$, y est continue, et le rcv est ≥ 1.

Proposition 16.

La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Démonstration non exigible.

Proposition 17.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
Si tel est le cas, $\boxed{G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)}$

Démonstration non exigible.

Remarque 11. On obtient les expressions de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence :
$G'_X(1) = \mathbb{E}(X), G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_k (k - \mathbb{E}[X])^2 \, \mathbf{P}(\{X = k\})$

$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

Proposition 18.

Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}[X] = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

Transfert et dérivations terme à terme successives des fonctions génératrices

Proposition 19.

La loi d'une v.a. X a valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

Par unicité du DSE :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X = k] = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Proposition 20.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

dém : par indépendance de t^X et t^Y, $\mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y]$

IV.2 Loi géométrique

Définition 12.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}eom(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

C'est la loi du premier succès dans une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

Proposition 21.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$
$\mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$
$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

démonstration : La série $\sum_k k^2 p(1-p)^{k-1}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k\, p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^k = \frac{p}{1-p}\,\frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

$$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$$

$$G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$$

Donc

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \frac{1}{p}$$

$$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2} \qquad \square$$

IV.3 Loi de Poisson

Définition 13.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Proposition 22.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \lambda$
$\mathbb{V}[X] = \lambda$
$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

démonstration :
La série $\displaystyle\sum_k k^2 \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} t^k \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$$
$G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$
$G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$
Donc
$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda$
$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda \quad \square$

Remarque 12 (additivité de poissons indépendantes)*.* Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

en effet : $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$, et la fonction génératrice caractérise la loi.

IV.4 Loi Binomiale

Définition 14.

On appelle loi Binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$ réel, la loi notée $\boxed{\mathcal{B}(N, p)}$ définie pour $S \hookrightarrow \mathcal{B}(N, p)$ par :

$$\mathbf{P}(\{S = k\}) = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k, \text{ pour tout } k \in [\![0, N]\!]$$

Proposition 23.

Pour S de loi $\mathcal{B}(N,p)$, on a :
$\mathbb{E}[S] = Np$
$\mathbb{V}[S] = Np(1-p)$
$G_S(s) = (1-p+ps)^N$

démonstration :

On calcule la somme finie $G_S(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} p^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} (1-p)^{N-k} (pt)^k = (1-p+pt)^N$

$G'_S(t) = Np(1-p+pt)^{N-1}$
$G''_S(t) = Np((N-1)p)(1-p+pt)^{N-2}$ (pour $N \geq 2$)
Donc
$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = Np$
$\mathbb{V}[S] = G''_S(1) + G'_S(1) - (G'_S(1))^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^1 = Np(1-p)$ $\square$

NOUVEAU Programme PC 2022 :

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\displaystyle\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Contenus	Capacités & commentaires

Contenus	Capacités & Commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes	
Univers Ω, tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.
b) Probabilité	
Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n)=0$ lorsque $P(A_n)=0$.
Formule de Bayes.	

d) Loi d'une variable aléatoire discrète

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$. On note $X\sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi, sans soulever de difficulté sur cette notation.
Variable aléatoire $f(X)$. Si $X\sim Y$ alors $f(X)\sim f(Y)$.	On ne soulève aucune difficulté sur le fait que $f(X)$ est une variable aléatoire.
Variable géométrique de paramètre $p\in\,]0,1[$: $$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X=k)=p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X\sim\mathcal{G}(p)$. Relation $P(X>k)=(1-p)^k$. Interprétation comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Variable de Poisson de paramètre $\lambda>0$: $$\forall k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=\mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$	Notation $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$. Interprétation en termes d'événements rares.
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x,Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Indépendance de deux événements.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B)=P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$	On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $P(X=+\infty)=0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\left(f(X)\right)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\lvert X\rvert\leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance	
Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$. Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1,1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.