PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°11$ du 2 Décembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Réduction

Evidemment, les outils des deux chapitres précédents (éléments propres et polynômes d'endomorphismes et matriciels) doivent être maîtrisés

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
   (a) Définition, énoncé du théorème :
   Il y a équivalence entre les points suivants :
      i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
      ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
      iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
      iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$
   (b) **Si $Sp(u)$(resp : Sp(A) est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$ (resp : $A = \lambda I_n$)**
   (c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse ! ! ! ! ! ! !**.
      ii. **Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable**.
   (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :
      i. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
      u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.
      ii. **Démo $\star$:u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod\limits_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.**
      iii. **Démo $\star$ Caractérisation des sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable**.
      iv. Théorème Spectral.

2 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. 1. Pour $k \geq 1$, déterminer les dérivées secondes de $f_k : x \mapsto \cos(kx); g_k : x \mapsto \sin(kx)$.
2. En déduire que f_k et g_k sont des vecteurs propres d'un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ à définir.
3. En déduire que $(f_k, g_k)_{k \geq 1}$ est une famille libre.

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que : $f^3 = Id_E$. Montrer que $E = \mathrm{Ker}\,(f - Id_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - jId_E) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - j^2 Id_E)$.

Exercice 3. 1. Quelle est la matrice d'un projecteur (resp : symétrie) dans une base adaptée à $E = \mathrm{Im}\,p + \mathrm{Ker}\,p$?
2. Écrire la matrice d'un endomorphisme dans une base adaptée à son noyau.

Exercice 4. 1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer qu'une matrice N est nilpotente ssi $\mathrm{Sp}\,(N) = \{0\}$. En déduire les matrices nilpotentes et diagonalisables ?

Exercice 5. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ m-2 & 2-m & m \end{pmatrix}$.

1. A_m est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $m = 2$. Trouver un polynôme annulateur de A_2 unitaire de degré 2.
3. En déduire le polynôme unitaire annulateur de A_2 de plus petit degré.
4. En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de A_2.
5. Calculer A_2^n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que $\mathbb{R}[A_2] = \{P(A_2)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev d'un espace à préciser et en donner une base et la dimension.
7. Trouver tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A_2.

Exercice 6.

1. Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.
2. Montrer par deux méthodes que tout projecteur ou symétrie est diagonalisable .

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$.
Montrer que $\operatorname{tr}(A) \in \mathbb{Z}$, $\det(A) = 0$ ou 1 et $rg(A)$ est pair.