PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°12$ du 16 Décembre 2024**

- Une colle sera du type d'un oral de **CCINP**, à savoir deux exercices :
  - Le premier exercice doit contenir :
    - Une question de cours (un énoncé d'une définition, d'une propriété ou d'un théorème) ou une démonstration qui sera **signalée en gras** dans le programme de colle.
      Deux niveaux de démonstration : niveau ($\star$) pour les volontaires.
    - Une application très directe du cours :
  - Un deuxième exercice portant sur une notion du programme de colle différente du premier exercice.
- **Comment préparer une colle ?** Il est indispensable de connaître son cours, savoir refaire les exemples traités en cours et les exercices mentionnés dans le programme de colle.

- **Notation** : Dès lors qu'il s'avère que le cours n'est pas su, la note sera obligatoirement inférieure à 8.
  Ensuite, les points seront rajoutés suivant votre autonomie face aux exercices.

- **Après la colle** : Avant le vendredi de la semaine suivant votre colle, vous devez me rendre votre cahier de colle où vous rédigerez au moins un des deux exercices

1 Réduction

Evidemment, les outils des deux chapitres précédents (éléments propres et polynômes d'endomorphismes et matriciels) doivent être maîtrisés

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
   (a) Définition, énoncé du théorème :
   Il y a équivalence entre les points suivants :
      i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
      ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
      iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
      iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$
   (b) **Si $Sp(u)$(resp : Sp (A) est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$ (resp : $A = \lambda I_n$)**
   (c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse!!!!!!!**.
      ii. **Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable**.
   (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :
      i. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
      u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.
      ii. **Démo $\star$:u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.**
      iii. **Démo $\star$ Caractérisation des sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable**.
      iv. Théorème Spectral.
      v. Trigonalisation : définition, caractérisation par le polynôme caractéristique scindé, exemples, aucune méthode de trigonalisation n'est exigible.
      vi. Applications de la réduction : calcul de puissances, d'inverse, **suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à termes soit complexes, soit réels**, suites récurrentes linéaires d'ordre p (connaître la méthode pour trouver le terme général d'une suite $(u_n)_n$ telle que $\exists(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p$, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \alpha_1 u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_p u_n$.

2 Suites et Séries de Fonctions

1. Convergence Simple d'une suite de fonctions, d'une série de fonctions : bien connaître les définitions et la méthode pour étudier une convergence simple.
2. Convergence Uniforme d'une suite de fonctions, d'une série de fonctions : bien connaître les définitions et la méthode pour étudier une convergence uniforme, en particulier quand il s'agit d'une série alternée. Se souvenir comment majorer la norme infinie du reste qui est le plus petit majorant du reste. Connaître la propriété qui permet de montrer qu'on n'a pas convergence uniforme en trouvant une suite $(x_n)_n$ telle que $(f_n(x_n) - f(x_n))_n$ ne converge pas vers 0.
3. Convergence normale d'une série de fonctions.

4. Théorème de continuité d'une fonction limite ou d'une somme d'une série de fonctions .Savoir l'utiliser par l'absurde pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme.
5. Théorème de double limite. Savoir l'utiliser pour montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$.

3 Exercices à savoir refaire

Exercice 1. 1. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

2. Montrer qu'une matrice N est nilpotente ssi $\mathrm{Sp}\,(N) = \{0\}$. En déduire les matrices nilpotentes et diagonalisables ?

Exercice 2. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ m-2 & 2-m & m \end{pmatrix}$.

1. A_m est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
2. Pour $m = 2$. Trouver un polynôme annulateur de A_2 unitaire de degré 2.
3. En déduire le polynôme unitaire annulateur de A_2 de plus petit degré.
4. En déduire l'ensemble des polynômes annulateurs de A_2.
5. Calculer A_2^n pour $n \in \mathbb{N}$.
6. Montrer que $\mathbb{R}[A_2] = \{P(A_2)/P \in \mathbb{R}[X]\}$ est un sev d'un espace à préciser et en donner une base et la dimension.
7. Trouver tous les sev de $\mathbb{R}^3$ stables par l'endomorphisme canoniquement associé à A_2.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A^3 + A = 0$.
Montrer que $\mathrm{tr}\,(A) = 0$ et $rg(A)$ est pair.

Exercice 4. Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 5 \\ -4 & -1 & 10 \\ 7 & -6 & 4 \end{pmatrix}$

1. A est elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? trigonalisable sur $\mathbb{R}$
2. Montrer qu'elle est semblable à $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Exercice 5. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le déterminant d'ordre n :

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \cdots & 0 \\ b & a+b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & b & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \cdots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}$$

Exercice 6. Donner en fonction de u_0, u_1, u_2 le terme général de la suite $(u_n)_n$ définie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 6u_n$$

Exercice 7. Résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 4x - y - 2z + e^t \\ y' & = & 2x + y - 2z \\ z' & = & x - y + z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 3x - y - z \\ y' & = & -x + 2y \\ z' & = & 3x - 2y \end{array} \right.$$

Exercice 8. 1. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto x^n$.

2. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto e^{i\frac{x}{n}}$.
3. Etudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto nx^2e^{-nx}$.
4. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto \underset{n, \frac{x^2}{n}}{Inf})$.
5. Etudier la convergence simple de $(f_n)_n$ où $f_n : x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} (1-\frac{x}{n})^n & \text{si } |x| \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right.$.

Exercice 9. 1. Montrer la convergence simple de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer qu'elle converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 10. 1. Montrer la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : x \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x}$ sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}^+$.

2. Soit $[a, b]$ segment de $\mathbb{R}$. Montrer qu'elle ne converge pas normalement sur $[a, b]$.

Exercice 11. 1. Donner l'ensemble de définition D de $\zeta : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

2. Montrer que ζ est continue sur D.
3. En utilisant un théorème et un raisonnement par l'absurde, démontrer que $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur D.
4. Donner $\lim\limits_{x \to +\infty} \zeta(x)$.
5. Reprendre les questions précédentes avec $\mu : x \mapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$.