classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°16$ du 20 Janvier 2025**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. Une question de cours comprenant
   (a) l'énoncé d'un théorème sur les suites et séries de fonctions.
   (b) l'énoncé d'une formule sur les probabilités ou propriété de continuité monotone.
2. Un premier exercice sur les probabilités.
3. Un deuxième exercice portant sur le calcul d'un rayon de cv d'une série entière.

1 Suites et Séries de Fonctions

Vous devez connaître parfaitement les définitions et énoncés des théorèmes

1. Théorème de continuité d'une fonction limite ou d'une somme d'une série de fonctions .Savoir l'utiliser par l'absurde pour montrer qu'il n'y a pas de convergence uniforme.
2. Théorème de double limite.
3. Intégration sur un segment.
4. Théorème de dérivation pour les suites de fonctions, pour les séries de fonctions. Généralisation du théorème.
5. Théorème de convergence dominée pour une suite de fonctions.
6. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

2 Probabilités .

1. Ensembles dénombrables et familles sommables :
   (a) définition d'un ensemble dénombrable, au plus dénombrable, les propriétés à connaître sont :
      - Toute partie d'un ensemble au plus dénombrable est au plus dénombrable.
      - Si E est un ensemble dénombrable, alors toute partie infinie de E est aussi dénombrable.
      - Toute réunion finie d'ensembles au plus dénombrables est au plus dénombrable.
      - Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est dénombrable.
      - $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ sont dénombrables, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable car il existe des parties non dénombrables.
2. Probabilité :
   (a) Le vocabulaire autour des probas ; Univers,éventualité,tribu, Événements, événement certain, impossible, élémentaire, contraires,incompatible, indépendant, définition d'un système complet d'événements, *savoir traduire les événements en réunion , intersection d'autres événements ou leurs contraires*
   (b) Probabilité : Définition et les propriétés usuelles.savoir à partir d'une suite (p_n), justifier qu'il existe une unique probabilité sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega))$ où $\Omega = \{\omega_n / n \in I\}$ avec I partie de $\mathbb{N}$.
   (c) Propriété de continuité monotone.
   (d) Probabilité conditionnelle : événements indépendants
   (e) Formules des proba. composées,totales, de Bayes.

3 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
   (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire $R = \frac{1}{l}$, il faut rédiger en deux temps :
      — d'abord je cherche la limite de $\left|\dfrac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right|$, je trouve
      — soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et $R = +\infty$,
      — soit $+\infty$ alors la série entière est toujours grossièrement dv et $R = 0$,
      — soit $l|z|$, alors cv abs pour $|z| < \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \geq \frac{1}{l}$ puis dv grossière pour $|z| > \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \leq \frac{1}{l}$ d'où $R = \frac{1}{l}$.
      — Attention aux séries lacunaires ! ! !
   (b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ quand $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n \sim b_n$.