

CETTE SEMAINE, la colle aura le **FORMAT SUIVANT** :

1. 1 question de cours parmi celles proposées ci-dessous.
2. Un premier exercice sur le problème du DS n°4 niveau Mines/Centrale pour les groupes 1 et 2 et sur le problème 1 (sur les séries de fonctions) du DS n°4 niveau E3A/CCINP pour les autres groupes.
3. Un deuxième exercice portant les séries entières.

## 1 Questions de cours

1. Donner la nature d'une série entière.
2. Montrer qu'une série entière d'une variable réelle converge normalement sur tout segment de son intervalle ouvert de convergence.
3. Citer les propriétés de la somme d'une série entière (continuité, dérivabilité, primitives).
4. Définition d'une fonction développable en série entière.
5. Présenter une fonction  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  qui n'admet pas de DSE.
6. Développements en série entière usuels : les connaître bien sûr par cœur mais aussi savoir retrouver celui de  $\cos, \text{ch}, \sin, \text{sh}, \ln(1 \pm x), \arctan, (1+x)^\alpha (\alpha \in \mathbb{R})$ .

## 2 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
  - (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire  $R = \frac{1}{l}$ , il faut rédiger en deux temps :
    - d'abord je cherche la limite de  $\left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right|$ , je trouve
    - soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et  $R = +\infty$ ,
    - soit  $+\infty$  alors la série entière est toujours grossièrement dv et  $R = 0$ ,
    - soit  $l|z|$ , alors cv abs pour  $|z| < \frac{1}{l}$ , je fais un dessin et je trouve  $R \geq \frac{1}{l}$  puis dv grossière pour  $|z| > \frac{1}{l}$ , je fais un dessin et je trouve  $R \leq \frac{1}{l}$  d'où  $R = \frac{1}{l}$ .
    - Attention aux séries lacunaires!!!
  - (b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries  $\sum a_n z^n$  et  $\sum b_n z^n$  quand  $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n \sim b_n$ .
4. Rayon de convergence d'une somme, d'un produit externe, interne de deux séries entières : bien connaître et savoir reconnaître un produit de Cauchy.
5. Propriétés de la somme d'une série entière :
  - Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, continuité de la somme.
  - Intégration d'une série entière, primitives de la somme.
  - La somme d'une série entière est  $C^\infty$  sur son intervalle ouvert de convergence, identification de deux séries entières.
  - Utilisation d'une série entière pour montrer qu'une application est  $C^\infty$ . (ex :  $x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln x}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$ )
6. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor.
7. Développements en série entière classiques : exponentielle, cos, sin, sh, ch,  $(1+x)^\alpha$  (avec méthode utilisant une équation différentielle), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de  $\ln(1 \pm x), \arcsin, \arccos, \arctan$ .