classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES **Programme de Colle semaine $n°22$ du 24 Mars 2025**

CETTE SEMAINE, la colle aura le FORMAT SUIVANT :

1. 1 question de cours parmi celles proposées .
2. Un exercice reprenant des questions sur les quatre exercices du dernier DS.
3. Un exercice sur les isométries vectorielles et endomorphismes autoadjoints.

1 Questions de cours

1. Montrer que $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.
2. Montrer que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}\,t$ est un produit scalaire sur $C([a, b], \mathbb{R})$. Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz associée.
3. Montrer qu'une famille orthogonale finie de vecteurs non nuls est libre.
4. Donner l'expression de $p_F(x)$ pour $x \in E$ et F sev de dim finie de E.
5. Donner l'expression de $d(x, F)$ pour $x \in E$ et F sev de dim finie de E.
6. Soit f une isométrie vectorielle d'un espace euclidien (c'est-à-dire endomorphisme conservant la norme). Montrer que f est une isométrie vectorielle d'un espace euclidien ssi f conserve le produit scalaire.
7. Toute isométrie vectorielle est un automorphisme.
8. L'application réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.
9. La composée d'isométries vectorielles reste une isométrie vectorielle.
10. $Sp_{\mathbb{R}}(f) \subset \{-1, 1\}$.
11. Soit F un s.e.v stable par f alors $F^\perp$ est stable par f.
12. Savoir donner les caractérisations d'une matrice orthogonale.
13. Montrer que pour une matrice orthogonale , son déterminant est ± 1.
14. Définition d'un endomorphisme autoadjoint et montrer que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes, alors les sous espaces propres associés sont orthogonaux.
15. Pour le groupe 2 : montrer que le polynôme caractéristique d'une matrice symétrique et à coeffs réels est scindé sur $\mathbb{R}$.
16. Enoncé rigoureux et complet du théorème spectral
17. Un endomorphisme u autoadjoint est positif (resp : défini positif) ssi $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}^+$ (resp : $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \mathbb{R}^+_*$)

2 Isométries vectorielles et Endomorphismes autoadjoints

Dans ce chapitre , vous devez savoir :

1. montrer et utiliser qu'une application linéaire est une isométrie vectorielle.
2. qu'une isométrie vectorielle est un automorphisme, l'application réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle, stabilité par la composée, son spectre est inclus dans $\{-1, 1\}$
3. définition d'une matrice orthogonale, les deux méthodes principales pour montrer qu'une matrice est orthogonale, lien avec les isométries vectorielles, déterminant d'une matrice orthogonale, CNS pour qu'une matrice de passage soit orthogonale, inverse d'une matrice orthogonale.
4. Définition du groupe orthogonal et sous groupe spécial orthogonale.
5. Les deux natures possibles pour une isométrie vectorielle en dim 2 : rotation d'angle θ et réflexion s de droite $\operatorname{Ker}(s - Id)$.
6. Définition du produit mixte et produit vectoriel en dim 3.
7. Savoir reconnaître une rotation et une réflexion en dim 3 et donner leurs éléments caractéristiques.
8. Savoir montrer qu'un endomorphisme est autoadjoint (soit par le produit scalaire, soit par sa matrice dans une b.o.n)
9. Savoir énoncer le théorème spectral
10. Savoir définir un endomorphisme u autoadjoint positif (resp : défini positif) et le lien avec le spectre.