Programme de colles Quinzaine 10 (semaines du 10/3 et du 17/3)

Chapitre 14 : Analyse asymptotique
La seconde partie du chapitre est consacrée à un nouvel outil : le développement limité
- Une définition à bien connaître.
- La formule de Taylor Young assure l'existence des DL pour les fonctions régulières ; elle fournit les premiers DL de référence.
- On peut calculer des DL par opérations : combinaisons linéaires, produits, composition et quotient avec le DL de $\frac{1}{1-u}$, en dérivant ou en primitivant.
- Les DL de référence doivent être connus par cœur ou bien être retrouvés très rapidement :

$$\frac{1}{1-x},\ \ln(1+x),\ \text{Arctan}(x),\ (1+x)^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R}),\ \mathrm{e}^{x},\ \cos(x),\ \sin(x),\ \text{ch}(x),\ \text{sh}(x)$$

- On a annoncé que le DL est outil, c'est donc qu'il est utile ! Les DL fournissent des équivalents, ils permettent de lever des formes indéterminées, d'étudier des positions relatives (localement), de trouver des asymptotes.

Démonstration : unicité du DL [$\star$].

Chapitre 15 : Dénombrement et probabilités
Des définitions théoriques à savoir reconnaître dans les exemples concrets.
- Dénombrement : listes, arrangements et combinaisons d'éléments d'un ensemble fini.
- Probabilités : expérience aléatoire, issues, univers, événements, système complet d'événements, probabilité, probabilité conditionnelle.

Des résultats de cours à connaître pour identifier les situations dans lesquelles ils s'appliquent.
- Dénombrement : nombre de parties d'un ensemble, nombre de $p-$listes, de $p-$arrangements et de $p-$combinaisons.
- Probabilités : s'il y a équiprobabilité sur un univers fini, le calcul des probabilités se ramène à un problème de dénombrement ($\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.
- Probabilités conditionnelles : probabilités composées, totales, formule de Bayes.

Démonstrations à connaitre :
- Soit Ω un ensemble fini. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$. *Deux preuves vues en classe : avec recurrence, ou sans* [$\star$].
- Formule de Pascal.

Déroulé de la colle :
1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Trouver une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$.

Exercice n° 2

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (X^2; (X-1)^2; (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 3

1. Déterminer le développement limité de tan à l'ordre 5 en 0.
2. Donner la tangente en 0 de $y = \tan(x)$, préciser les positions relatives de la courbe et de sa tangente.

Exercice n° 4

Donner le nombres d'annagrammes du mot « alaska ».

Exercice n° 5

Donner les limites en 1^+ et en $+\infty$ de $f(x) = x\ln(\frac{x}{x-1})$.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 6

Soit $F = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+2y+z=0\}$ et $G = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x+y+2z=0\}$.

1. Prouver que F et G sont des SEV de $\mathbb{R}^3$. Quelle sont leurs dimensions ?
2. F et G sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
3. Déterminer une base de $F \cap G$.
4. Déterminer une base de $F + G$.

Exercice n° 7

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut 1/2. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Exercice n° 8

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?