# Programme de colles Quinzaine 14 (semaines du 27 mai et du 3 juin)

---

**Chapitre 20 : matrice d'une application linéaire**
Dans ce chapitre, on peut faire la confusion entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

$E$ et $F$ sont des $\mathbb{K}$-EV de dimensions finies dont des bases sont $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Le premier objectif de ce chapitre est de bien comprendre le lien entre matrices et applications linéaires :

- En utilisant les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ on peut représenter les vecteurs de $E$ et $F$ par des colonnes (de taille $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$). Si on considère un vecteur $x$ de $E$ notons $X$ la colonne des coordonnées de $x$ dans $\mathcal{B}_E$.
- On définit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ par colonnes : ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par $u$, exprimés dans $\mathcal{B}_F$.
- Les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ étant fixées l'application qui à $u$ associe la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ réalise un isomorphisme d'EV entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- Si on change les bases, on change de matrice : on donc (potentiellement) plusieurs matrices qui représentent la même application linéaire. Dans le cas d'endomorphismes (et donc de matrices carrées), on dit que les matrices sont semblables.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à $A$ est $X \mapsto AX$. (Avec $X \in \mathbb{K}^p$ et $AX \in \mathbb{K}^n$).
- En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, on définit le noyau, l'image et le rang d'une matrice.
  On « transporte » le théorème du rang de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ : $p = \mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A))$.

D'un point de vue pratique :

- déterminer l'image d'un vecteur $x$ par $u$ correspond à multiplier $X$ à gauche par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ ;
- composer des applications linéaires correspond à multiplier leurs matrices (attention aux bases et à l'ordre du produit : il est conseillé d'écrire les diagrammes).
- Changer de base correspond à changer de point de vue sur les vecteurs. Par exemple, si $x \in E$ est représenté par $X$ dans $\mathcal{B}_E$ et par $X'$ dans $\mathcal{B}'_E$ : on aura $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)X'$.
  La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$ est une matrice de passage.
- Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ correspondent aux images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par $u$, elles constituent donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Si on veut en extraire une base, on peut appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes.
- Déterminer le noyau de $u$ revient à résoudre l'équation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)X = 0$, c'est-à-dire un système linéaire *(de quelle taille ?)*. On le résout en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes.
- $u$ est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. En pratique : on calcule le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ en utilisant l'algorithme de Gauss sur les lignes et les colonnes, on a inversibilité ssi il vaut $\dim(E) = \dim(F)$.

**Chapitre 21 : Variables aléatoires sur un univers fini**
On revoit et on approfondit les notions vues en Terminale.

Savoirs-faire à maîtriser :

- Donner la loi de probabilité d'une VA.
- Calculer l'espérance et la variance d'une VA dont on connait la loi de probabilité.
- Reconnaître lorsqu'une VA suit une loi de référence (certaine, uniforme, Bernoulli ou binomiale).

Démonstrations à connaitre pour cette quinzaine :

- La série harmonique diverge.
- La série harmonique alternée converge vers $-\ln(2)$.
- Deux matrices semblables ont même rang.

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

**remédiation** : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

**renforcement** : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

**performance** : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

**Exercices de la 1ère semaine**

### Exercice n° 1

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les matrices de :

- L'homothétie vectorielle de rapport 3 ;
- La projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$ ;
- La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$ ;
- La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$

### Exercice n° 2

Soit $u$, l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = 2XP' + (1 - X^2)P''$.

1. Déterminer la matrice de $u$ relativement à la base canonique.
2. En déduire $\mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

### Exercice n° 3

Soit $n \geq 1$. On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme $u$ défini par $u(P(X)) = P(X+1)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{can}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Mat}_{can}(u)$ est inversible.
3. Sans faire de calcul, déterminer la matrice inverse de $\mathrm{Mat}_{can}(u)$.