Programme de colles Quinzaine 14 (semaines du 27 mai et du 3 juin)

Chapitre 20 : matrice d'une application linéaire

Dans ce chapitre, on peut faire la confusion entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

E et F sont des $\mathbb{K}$-EV de dimensions finies dont des bases sont $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On considère $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

Le premier objectif de ce chapitre est de bien comprendre le lien entre matrices et applications linéaires :

— En utilisant les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ on peut représenter les vecteurs de E et F par des colonnes (de taille $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$). Si on considère un vecteur x de E notons X la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_E$.

— On définit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ par colonnes : ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, exprimés dans $\mathcal{B}_F$.

— Les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ étant fixées l'application qui à u associe la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ réalise un isomorphisme d'EV entre $\mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

— Si on change les bases, on change de matrice : on donc (potentiellement) plusieurs matrices qui représentent la même application linéaire. Dans le cas d'endomorphismes (et donc de matrices carrées), on dit que les matrices sont semblables.

— Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $X \mapsto AX$. (Avec $X \in \mathbb{K}^p$ et $AX \in \mathbb{K}^n$).

— En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, on définit le noyau, l'image et le rang d'une matrice.
On « transporte » le théorème du rang de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p,\mathbb{K}^n)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $p = \mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A))$.

D'un point de vue pratique :

— déterminer l'image d'un vecteur x par u correspond à multiplier X à gauche par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$;

— composer des applications linéaires correspond à multiplier leurs matrices (attention aux bases et à l'ordre du produit : il est conseillé d'écrire les diagrammes).

— Changer de base correspond à changer de point de vue sur les vecteurs. Par exemple, si $x \in E$ est représenté par X dans $\mathcal{B}_E$ et par X' dans $\mathcal{B}'_E$: on aura $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)X'$.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$ est une matrice de passage.

— Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ correspondent aux images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, elles constituent donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Si on veut en extraire une base, on peut appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes.

— Déterminer le noyau de u revient à résoudre l'équation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)X = 0$, c'est-à-dire un système linéaire *(de quelle taille ?)*. On le résout en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes.

— u est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. En pratique : on calcule le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ en utilisant l'algorithme de Gauss sur les lignes et les colonnes, on a inversibilité ssi il vaut $\dim(E) = \dim(F)$.

Chapitre 21 : Variables aléatoires sur un univers fini

On revoit et on approfondit les notions vues en Terminale. Quelques nouveaux résultats : les inégalités de Markov et de Bienaymé Tchébychev ; la variance et la covariance.

Savoirs-faire à maîtriser :

— Donner la loi de probabilité d'une VA.

— Calculer l'espérance et la variance d'une VA dont on connait la loi de probabilité.

— Reconnaître lorsqu'une VA suit une loi de référence (certaine, uniforme, Bernoulli ou binomiale).

Démonstrations à connaitre pour cette quinzaine :

— La série harmonique diverge.

— La série harmonique alternée converge vers $-\ln(2)$.

— Deux matrices semblables ont même rang.

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.
3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercice n° 1

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les matrices de :
- L'homothétie vectorielle de rapport 3 ;
- La projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $\text{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$;
- La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$;
- La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$

Exercice n° 2

Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = 2XP' + (1 - X^2)P''$.
1. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique.
2. En déduire $\text{rg}(u)$, $\text{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

Exercice n° 3

Soit $n \geq 1$. On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme u défini par $u(P(X)) = P(X+1)$.
1. Déterminer $\text{Mat}_{can}(u)$.
2. Justifier que $\text{Mat}_{can}(u)$ est inversible.
3. Sans faire de calcul, déterminer la matrice inverse de $\text{Mat}_{can}(u)$.

Exercice n° 4

On dispose d'un dé équilibré à 4 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 3 ainsi qu'une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On lance simultanément la pièce et le dé, on appelle Z le produit de leurs résultats.
1. Donner la loi de Z.
2. On décide de créer un jeu d'argent avec cette expérience. Pour participer, le joueur doit payer 1 euro, il reçoit Z^2 euros. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice n° 5

Un service technique gère la maintenance de 150 serveurs. On a mesuré que la probabilité de panne sur un serveur est de $0,002$ par jour.
1. Quelle est la probabilité qu'aucun serveur ne tombe en panne pendant une journée ?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement un serveur tombe en panne en une journée ?
3. Quelle est la probabilité que 3 serveurs ou plus tombent en panne en une journée ?
4. Lorsqu'un serveur tombe en panne, cela nécessite l'intervention d'un technicien, pendant toute la journée. Combien de technicien faut-il prévoir pour que la probabilité qu'il n'y ait pas assez de techniciens pour réparer les serveurs soit inférieure à 10^{-2} ?