

Programme de colles Quinzaine 15 (semaines du 10 mai et du 17 juin)

Chapitre 22 : Espaces préhilbertiens

On généralise les notions de produit scalaire et d'orthogonalité, usuelles dans la géométrie du plan et de l'espace. On travaille dans un espace vectoriel réel E .

Des notions nouvelles à connaître de façon précise :

- Définition d'un produit scalaire, produits scalaires usuels sur \mathbb{R}^n , $\mathcal{C}^0([a; b])$. On privilégie la notation $\langle x, y \rangle$.
- Norme euclidienne et ses propriétés : séparation, homogénéité. Calculs usuels : $\|x \pm y\|^2 = \dots$ on en déduit $\langle x, y \rangle$ et $\|x\|^2 + \|y\|^2$ en fonction de $\|x + y\|^2$ et $\|x - y\|^2$.
- L'inégalité de Cauchy Schwarz permet d'établir que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
- L'orthogonalité de deux vecteurs est la nullité du produit scalaire ; l'orthogonal d'une partie non vide A de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A , on la note A^\perp . A^\perp est un SEV de E .
- Familles orthogonales, orthonormées. Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.
- Théorèmes de Pythagore : pour deux vecteurs on a une équivalence, pour $n > 2$ vecteurs on a une implication.
- En dimension finie, il existe des bases qui sont orthonormées. Les coordonnées sont simples à obtenir : si $(e_i)_{[1;n]}$ est une BON alors tout vecteur x s'écrit $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i$. Avec les coordonnées dans une BON, calculer les produits scalaires (et donc les normes) devient simple.
- Soit F un SEV de dimension finie de E . F admet un unique supplémentaire orthogonal qui est F^\perp . Ceci permet de définir la projection orthogonale sur F (les projections sont simples à calculer en travaillant dans une BON de F).
- Travailler dans une BON est donc pratique ; reste à en avoir une. C'est l'objet de l'algorithme de Gram Schmidt qui permet d'orthonormaliser une famille libre.

Démonstrations à connaître :

- Inégalité de Cauchy Schwarz.
- Inégalité de Cauchy Schwarz avec le cas d'égalité $[\star]$.
- Si $A \subset E$ alors A^\perp est un SEV de E .
- Preuve de l'existence de BON dans un espace euclidien de dimension n par récurrence sur n $[\star]$.

Savoirs-faire à maîtriser :

- Décider si une application est un produit scalaire ou non.
- Calculer dans un espace préhilbertien (en particulier s'il y a un produit scalaire usuel).
- Appliquer l'algorithme de Gram Schmidt en petite dimension.

Chapitre 21 : Déterminants (*début du chapitre*)

On travaille dans un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.

Des notions nouvelles à connaître de façon précise :

- Il existe une unique application $E^n \rightarrow \mathbb{K}$ qui soit linéaire sur chaque composante, alternée et qui vérifie $B \mapsto 1$, on l'appelle déterminant dans la base B et on la note \det_B .
- La linéarité sur chaque composante et le caractère alterné impliquent l'antisymétrie ; en dimensions 2 et 3 on obtient des formules explicites qui prouvent l'existence et l'unicité du déterminant dans la base B . Pour les dimensions supérieures, l'existence et l'unicité est admise.
- Le déterminant permet de caractériser les bases : la famille (x_i) est une base ssi $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ (quelle que soit la base B).

- Déterminant d'un endomorphisme : soit $f \in \mathcal{L}(E)$.
Le nombre $\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de B , on l'appelle déterminant de f .
- Le déterminant permet de caractériser les automorphismes : l'endomorphisme f est un automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$.

Démonstrations à connaître :

- Si $n = 2$ la définition du produit scalaire dans B entraîne $\det_B(x_1e_1 + x_2e_2; y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1$.
- Si $\phi : E^n \rightarrow \mathbb{K}$ est linéaire en chaque composante alors ϕ est un multiple de \det_B .
- On travaille pour $n = 2$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. $\det f$ est bien défini, autrement dit : le scalaire $\det_B(f(e_1), f(e_2))$ ne dépend pas de la base B . [★]

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

On dispose d'un dé équilibré à 4 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 3 ainsi qu'une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 0 et 1.

On lance simultanément la pièce et le dé, on appelle Z le produit de leurs résultats.

1. Donner la loi de Z .
2. On décide de créer un jeu d'argent avec cette expérience. Pour participer, le joueur doit payer 1 euro, il reçoit Z^2 euros. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice n° 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces qu'on lance 10 fois. On appelle X le nombre de 1 et Y le nombre de résultats pairs. Soit $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.

Quelle est la probabilité que A ne soit pas inversible ?

Exercice n° 3

Dans \mathbb{R}^3 muni de son produit scalaire usuel, on considère le plan $P : 2x + y - z = 0$.

1. Donner une base orthonormée de P .
2. Calculer la distance entre $u(1; 1; 1)$ et P .