Programme de colles Quinzaine 15 (semaines du 10 mai et du 17 juin)

Chapitre 22 : Espaces préhilbertiens
On généralise les notions de produit scalaire et d'orthogonalité, usuelles dans la géométrie du plan et de l'espace. On travaille dans un espace vectoriel réel E.

Des notions nouvelles à connaitre de façon précise :

— Définition d'un produit scalaire, produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}^0([a;b])$. On privilégie la notation $< x, y >$.

— Norme euclidienne et ses propriétés : séparation, homogénéité. Calculs usuels : $\|x \pm y\|^2 = \dots$ on en déduit $< x, y >$ et $\|x\|^2 + \|y\|^2$ en fonction de $\|x+y\|^2$ et $\|x-y\|^2$.

— L'inégalité de Cauchy Schwarz permet d'établir que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.

— L'orthogonalité de deux vecteurs est la nullité du produit scalaire ; l'orthogonal d'une partie non vide A de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A, on la note $A^\perp$. $A^\perp$ est un SEV de E.

— Familles orthogonales, orthonormées. Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.

— Théorèmes de Pythagore : pour deux vecteurs on a une équivalence, pour $n > 2$ vecteurs on a une implication.

— En dimension finie, il existe des bases qui sont orthonormées. Les coordonnées sont simples à obtenir : si $(e_i)_{[\![1;n]\!]}$ est une BON alors tout vecteur x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Avec les coordonnées dans une BON, calculer les produits scalaires (et donc les normes) devient simple.

— Soit F un SEV de dimension finie de E. F admet un unique supplémentaire orthogonal qui est $F^\perp$. Ceci permet de définir la projection orthogonale sur F (les projections sont simples à calculer en travaillant dans une BON de F).

— Travailler dans une BON est donc pratique ; reste à en avoir une. C'est l'objet de l'algorithme de Gram Schmidt qui permet d'orthonormaliser une famille libre.

Démonstrations à connaitre :

— Inégalité de Cauchy Schwarz.

— Inégalité de Cauchy Schwarz avec le cas d'égalite [$\star$].

— Si $A \subset E$ alors $A^\perp$ est un SEV de E.

— Preuve de l'existence de BON dans un espace euclidien de dimension n par récurrence sur n [$\star$].

Savoirs-faire à maîtriser :

— Décider si une application est un produit scalaire ou non.

— Calculer dans un espace préhibertien (en particulier s'il y a un produit scalaire usuel).

— Appliquer l'algorithme de Gram Schmidt en petite dimension.

Chapitre 21 : Déterminants *(début du chapitre)*
On travaille dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.
Des notions nouvelles à connaitre de façon précise :

— Il existe une unique application $E^n \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire sur chaque composante, alternée et qui vérifie $B \mapsto 1$, on l'appelle déterminant dans la base B et on la note $\det_B$.

— La linéarité sur chaque composante et le caractère alterné impliquent l'antisymétrie ; en dimensions 2 et 3 on obtient des formules explicites qui prouvent l'existence et l'unicité du déterminant dans la base B. Pour les dimensions supérieures, l'existence et l'unicité est admise.

— Le déterminant permet de caractériser les bases : la famille (x_i) est une base ssi $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ (quelle que soit la base B).

— Déterminant d'un endomorphisme : soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
Le nombre $\det_B(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ ne dépend pas de B, on l'appelle déterminant de f.

— Le déterminant permet de caractériser les automorphismes : l'endomorphisme f est un automorphismes ssi $\det(f) \neq 0$.

Techniques de calcul à maîtriser :

— Le déterminant peut se calculer en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes (attention : les dilatations et les permutations changent la valeur du déterminant).

— Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

— On peut développer par rapport à une ligne ou à une colonne.

— Parfois, il est clair que le déterminant est nul (une ligne ou une colonne de zéros, une ligne ou une colonne combinaison linéaire des autres...).

Démonstrations à connaître :

— Si $n = 2$ la définition du produit scalaire dans B entraine $\det_B(x_1e_1 + x_2e_2; y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1$.

— Si $\phi : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire en chaque composante et alternée alors ϕ est un multiple de $\det_B$.

— On travaille pour $n = 2$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. $\det f$ est bien défini, autrement dit : le scalaire $\det_B(f(e_1), f(e_2))$ ne dépend pas de la base B. [$\star$]

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

On dispose d'un dé équilibré à 4 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 3 ainsi qu'une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On lance simultanément la pièce et le dé, on appelle Z le produit de leurs résultats.

1. Donner la loi de Z.
2. On décide de créer un jeu d'argent avec cette expérience. Pour participer, le joueur doit payer 1 euro, il reçoit Z^2 euros. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice n° 2

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces qu'on lance 10 fois. On appelle X le nombre de 1 et Y le nombre de résultats pairs. Soit $A = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité que A ne soit pas inversible ?

Exercice n° 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le plan $P : 2x + y - z = 0$.

1. Donner une base orthonormée de P.
2. Calculer la distance entre $u(1; 1; 1)$ et P.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 4

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = ((-1)^{i+j})_{1 \leq i,j \leq 4} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice n° 5

1. Prouver que le déterminant d'une symétrie de $\mathbb{R}^2$ est dans $\{1; -1\}$.
2. Etudier la réciproque.