Programme de colles Quinzaine 3 (semaines du 14/10 et du 4/11)

Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions et nouvelles fonctions de référence
Ce chapitre commence par une partie théorique sur les application pour aboutir aux notions de bijection et d'application réciproque.
Une première application des bijections est la résolution d'équations par équivalences, on comprend l'importance d'utiliser des quantificateurs. On revoit ensuite des choses connues : calcul de dérivées (on rajoute les composées), applications à l'étude des variations, plan d'étude d'une fonction.
On finit par un catalogue de fonctions de référence, qui en comporte de nouvelles. En particulier, la valeur absolue est LE contre-exemple pour bien comprendre qu'une fonction peut être continue sans être dérivable ; la partie entière ; les fonctions trigonométriques réciproques (*de quoi ?*) ; fonctions puissances et exponentielles de base a.

Connaissances à mémoriser :
- Des définitions précises (applications surjectives, injectives, bijectives ; parité des fonctions ; variations des fonctions).
- La composition des fonction : ce dont il s'agit, formule pour dériver une composée.
- Des fonctions de référence dont il faut connaître les définitions, les courbes représentatives et les propriétés.

Savoirs-faire à maîtriser :
- Penser aux quantificateurs. *Quand ? Tout le temps !*
- Etudier une fonction *(note pour les colleurs : on n'a pas revu les limites, on s'appuie sur les connaissances de Terminale).*
- savoir utiliser les fonctions trigonométriques réciproques.

Démonstrations à connaitre :
- Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont surjectives alors $g \circ f : A \to C$ est surjective.
- La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur $\mathbb{R}^{-*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall x \in]-1;1[,\ \text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Chapitre 4 : Compléments sur les complexes
Dans ce chapitre, on continue à faire des ponts entre les complexes et la géométrie du plan, puis on s'intéresse à des équations polynômiales.

Connaissances à mémoriser :
- les opérations sur les complexes s'interprêtent géométriquement (addition$\leftrightarrow$translation, multiplication par un réel k $\leftrightarrow$homothétie de centre O et de rapport k, multiplication par $e^{i\theta}$ $\leftrightarrow$ rotation de centre O et d'angle θ).
- Pour tout complexe non nul c, l'équation $z^2 = c$ admet exactement deux solutions qu'on appelle racines carrées de c. Attention, il n'est pas question d'utiliser le symbole $\sqrt{\ }$ si $c \notin \mathbb{R}^+$.
- Toute équation du second degré admet au moins une solution (les formules prolongent celles vues au lycée dans le cas particulier où les coefficients sont réels).
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions de $z^n = 1$ s'appellent racines $n^{\text{ème}}$ de 1. Il y en a n, ce sont les termes d'une suite géométrique : $(\alpha^k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ avec $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{n}}$, leur somme est nulle, leurs images dans le plan complexe sont les sommets d'un polygône régulier à n côtés inscrit dans le cerlcle trigonométrique.
- Fonction $z \mapsto e^z$. Attention : on n'a pas équivalence entre $e^z = e^{z'}$ et $z = z'$.

Savoirs-faire à maîtriser :
- on peut caractériser l'alignement ou la perpendicularité à l'aide des complexes.
- Calculer des racines carrées avec la forme algébrique ou avec la forme exponentielle.
- Résoudre des équations de degré 2.
- Résoudre un système de la forme $\begin{cases} x + y = \\ xy = \end{cases}$
- Se servir des racines $n^{\text{ème}}$ de 1 *(guidé la première semaine).*

Démonstrations à connaitre :
- La somme des racines $n^{\text{ème}}$ de 1 est nulle.
- Résolution de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$). [$\star$]

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Faire l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \text{Arcsin}(1 + x - x^2)$.
On donnera l'allure de sa courbe représentative.

Exercice n° 2

Faire l'étude de la fonction f définie par $f(x) = \text{Arctan}\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.
On donnera l'allure de sa courbe représentative.

Exercice n° 3

Résoudre $z^2 + \mathrm{i}z + (2 - \mathrm{i}) = 0$.

Exercice n° 4

Résoudre $\begin{cases} x + y = 1 + \mathrm{i} \\ xy = \frac{1}{2} \end{cases}$.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Soit $n \geq 2$ un entier, on considère l'équation $(z + \mathrm{i})^n = 1$.

1. Prouver que cette équation admet exactement n solutions qu'on explicitera et qu'on notera $(z_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k$.
3. En utilisant une factorisation par l'angle moitié, déterminer $|z_k|$ pour tout $k \in [\![1;n]\!]$.

Exercice n° 6

1. Déterminer l'ensemble S des solutions de $z^5 = \mathrm{i}$.
2. Préciser le cardinal *(c'est-à-dire le nombre d'éléments)* de S.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{z \in S} z$.