Programme de colles Quinzaine 4 (semaines du 11/11 et du 18/11)

Chapitre 5 : vers les équations différentielles
Dans ce chapitre, on introduit la notion d'équation différentielle et on détailles les objectifs du programme : équations différentielles linéaires d'ordre 1, équations différentielles linéaires à coefficients constants d'ordre 2. Avant de traiter les équations linéaires d'ordre 1, on rappelle les bases de l'intégration et du calcul de primitives.

Primitives et intégrales :
— Si les bornes sont « dans le bon sens », une intégrale s'interprète comme une **aire algébrique**.
— Le **théorème fondamental de l'analyse** expose le lien entre les primitives et les intégrales : à l'aide des intégrales on obtient des primitives pour les fonctions continues ; réciproquement, si on dispose d'une primitive il est aisé de calculer une intégrale.
— calcul intégral : dans de rares cas en calculant une surface ; le plus souvent à l'aide d'une primitive, d'une **IPP** ou d'un **changement de variable**.

Equations différentielles :
— Vocabulaire et notations, exemples de référence issus de la physique et de la chimie.
— Pour résoudre l'**équation différentielle linéaire du premier ordre** $(E) : y' + a(x)y = b(x)$ on procède par étapes :

1. les solutions de l'**équation homogène** $y' + a(x)y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto K\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $A(x)$ qui est une primitive de $a(x)$ et K une constante ;
2. on trouve une **solution particulère** f de (E) ;
3. la **solution générale** de (E) est $x \mapsto f(x) + K\mathrm{e}^{-A(x)}$.

Il y a donc une infinité de solutions, lorsqu'on a une **condition initiale** on trouve l'unique solution qui la vérifie.
— Pour trouver la solution particulière, il y a plusieurs stratégies : on peut essayer un candidat de la forme du **second membre** $b(x)$. Si ça ne fonctionne pas, on utilise la méthode de la **variation de la constante** et alors le candidat est $x \mapsto K(x)\mathrm{e}^{-A(x)}$ avec $K(x)$ une fonction dérivable à déterminer. Les calculs conduisent alors à une recherche de primitive.

Démonstrations à connaitre :
— Formule d'intégration par parties.
— Soit f une solution particulière de l'équation différentielle linéaire $(E) : y' + a(x)y = b(x)$. Une fonction g est solution de (E) si, et seulement si, $g - f$ est solution de $(E)_h : y' + a(x)y = 0$.

Chapitre 6 : arithmétique des entiers
Un chapitre singulier : on passera très rapidement sur les exercices.
Il faut en retenir les définitions ainsi que les démonstrations : cela prépare l'arithmétique des polynômes.

Des définitions à connaitre et qu'il faut savoir illustrer par des exemples et des contre-exemples :
— Diviseur, multiple, nombres premiers.
— Division euclidienne.

Démonstrations à connaitre :
— Il y a une infinité de nombres premiers.
— Existence et unicité de la division euclidienne [$\star$].
— Lemme d'Euclide [$\star$].

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

1. Déterminer l'ensemble S des solutions de $z^5 = \mathrm{i}$.
2. Préciser le cardinal *(c'est-à-dire le nombre d'éléments)* de S.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{z\in S} z$.

Exercice n° 2

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{2} 3x+1 \,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{\pi} x^2 \sin(x) \,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)} \,\mathrm{d}x \quad ; \quad \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} \,\mathrm{d}x$$

Exercice n° 3

Résoudre sur $]-1;+\infty[$ l'équation différentielle $(x-1)y' - xy + 1 = 0$ avec la condition $y(0) = 2$.