Programme de colles Quinzaine 5 (semaines du 25/11 et du 2/12)

Chapitre 7 : suites
On revoit les notions découvertes au lycée en allant plus loin dans la rigueur : l'utilisation des quantificateurs est très importante. Il faut être attentif aux notations : les suites se notent u, $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$; u_n désigne le terme d'indice n de la suite u.

Des définitions à connaitre :
- Suites de référence : approximation décimale d'un réel, suites arithmétiques, géometriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Variations des suites : définitions avec des quantificateurs.
- Limites : définitions avec des quantificateurs.
- Suites adjacentes.

Des méthodes à maîtriser :
- Obtenir u_n en fonction de n quand u est une suite arithmético-géométrique, une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
- Pour étudier les variations d'une suite, plusieurs stratégies :
  - pour tout n, étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$;
  - pour tout n, comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 en faisant attention à ce que u soit > 0 ou < 0 ;
  - pour les suites définies de façon explicite : si f est monotone alors $(f(n))_n$ a la même monotonie ;
  - pour les suites vérifiant une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » : si f est croissante alors u est monotone. La monotonie dépend de l'ordre entre u_0 et u_1 et se prouve par récurrence.
- Pour étudier le comportement asymptotique d'une suite :
  - opérations sur les limites, attention : lorsqu'on a une FI (presque) tous les cas sont possibles ;
  - si on a l'idée de la limite, on peut la prouver en utilisant les définitions ;
  - le théorème des gendarmes est souvent utile lorsque des termes n'ont pas de limite mais sont bornés (par exemple : $((-1)^n)_n$ et $(\cos(n))_n$) ;
  - le théorème de la convergence monotone prouve l'existence d'une limite mais ne la donne pas.
  - Pour les suites vérifiant une relation « $u_{n+1} = f(u_n)$ » : si f est continue et que u converge alors la limite est un point fixe de f.
  - On peut se servir des suites adjacentes pour prouver l'existence d'une limite (en regardant séparément les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs), on peut aussi les utiliser pour prouver qu'il n'y a pas de limite (en exhibant deux suites extraites qui ont des limites différentes).

Démonstrations à connaitre :
- Si $u \to \ell_1$ et $v \to \ell_2$ avec ℓ_1 et ℓ_2 qui sont réels alors $u + v \to \ell_1 + \ell_2$.
- Si $u \to \ell_1$ et $v \to \ell_2$ avec ℓ_1 et ℓ_2 qui sont réels alors $u + v \to \ell_1 \times \ell_2$ [$\star$].
- Pas vu en classe : si $u \to +\infty$ et $v \to +\infty$ alors $u + v \to +\infty$.
- Pas vu en classe : si $u \to \ell$ et $v \to +\infty$ alors $\frac{u}{v} \to 0$ [$\star$].

TD sur la décomposition en éléments simples des fractions rationnelles
On a vu comment poser des **divisions euclidiennes** de polynômes ainsi que la méthode pour décomposer une fraction rationnelle $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ en éléments simples :
- on pose la division de $A(X)$ par $B(X)$: $A(X) = (BQ + R)(X)$;
- on a alors $\dfrac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$;
- on trouve la factorisation de $B(X)$ en produit de **polynômes irréductibles**, attention : il y a peut-être une différence selon que l'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$;
- on a une formule qui donne $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ comme une somme de fractions dont les dénominateurs font intervenir les polynômes irréductibles de la décomposition de $B(X)$. Il reste alors à obtenir un système pour trouver les valeurs des coefficients des numérateurs.

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Résoudre $xy' + (1-x)y = \mathrm{e}^{2x}$ pour $x > 0$.

Exercice n° 2

Calculer $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} \sqrt{1+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$ en posant $t = \sqrt{1+\mathrm{e}^x}$.

Exercice n° 3

1. Désomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{2}{X^3+3X^2+2X}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3+3k^2+2k}$.

Exercice n° 4

On considère la suite de Fibonacci $(F_n)_n$ définie par $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 2$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

1. Donner l'expression de F_n en fonction de n.
2. Exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k$ en fonction de n.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Soit v une suite définie par $v_0 \in [0;1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1-v_n)$.

1. Prouver par récurrence que v est une suite bien définie d'éléments de $[0;1]$.
2. Prouver que v est une suite convergente.
3. Déterminer $\lim v$.

Exercice n° 6

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.