Programme de colles Quinzaine 6 (semaines du 9/11 et du 16/12)

Chapitre 8 : Equations différentielles du second ordre, linéaires à coefficients constants
Un chapitre court, orienté vers la mise en pratique :
- Savoir reconnaître ces équations ;
- appliquer la méthode pour traiter l'équation homogène, via l'équation caractéristique, on trouve une infinité de solutions qui dépendent de deux paramètres ;
- chercher une solution particulière de la forme du second membre ;
- la solution générale a la même structure que pour le premier ordre : la solution particulière plus une solution de l'équation homogène ;
- éventuellement, on trouve parmi l'infinité de solutions de l'équation, celle qui vérifie les conditions initiales. Cela revient à trouver les valeurs des deux paramètres.

Chapitre 9 : Matrices
On commence par présenter les matrices ainsi que les opérations associées. Dans un second temps, on se sert des matrices pour donner une assise théorique à la méthode de résolution des systèmes linéaires avec le pivot de Gauss. Enfin, on travaille spécifiquement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on s'interesse à l'inversibilité des matrices.

Des définitions et des notations à comprendre et à maîtriser :
- Vocabulaire des matrices : ligne, colonne, diagonale, matrice carrée, triangulaire supérieure ou inférieure, symétrique, antisymétrique.
- Addition, produit par un scalaire dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Produit de deux matrices dont les tailles sont compatibles, attention : ce produit n'est (en général) ni commutatif, ni intègre.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est composée des matrices élémentaires $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{(k,l)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ avec $(i,j)) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$. *Cette dernière expression illustre une des difficultés de ce chapitre : les notations. Veillez à bien comprendre le rôle de chaque lettre utilisée.*
- Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes : dilatation, transvection et permutation. Elles correspondent à des produits à gauche (pour les opérations sur les lignes) ou à droite (sur les colonnes) par des matrices qui sont inversibles.
- Vocabulaire des systèmes linéaires : colonnes des inconnues, du second membre, système homogène, système compatible ou incompatible.
- Matrices inversibles, groupe linéaire.

Des méthodes à connaître :
- Calculer un produit matriciel.
- Résoudre un système linéaire en appliquant le pivot de Gauss.
- Utiliser la formule du binôme de Newton (attention à la condition de commutativité) pour calculer une puissance.
- Décider l'inversibilité d'une matrice 2×2 à l'aide du déterminant ; le cas échéant donner l'inverse.
- Algorithme pour décider si une matrice de taille 3×3 est inversible et, le cas échéant, calculer l'inverse.

Démonstration à connaître :
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. M est inversible si, et seulement si, $ad-bc \neq 0$. On a alors $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- [$\star$] : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

Déroulé de la colle :
1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Soit v une suite définie par $v_0 \in [0;1]$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n(1 - v_n)$.

1. Prouver par récurrence que v est une suite bien définie d'éléments de $[0;1]$.
2. Prouver que v est une suite convergente.
3. Déterminer $\lim v$.

Exercice n° 2

On considère la suite u définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et pour $n \geq 2$, $u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}$.

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2. Montrer que $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
3. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice n° 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^3 = 0$.
2. Exprimer B en fonction de A.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, B^n.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 4

Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 5

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$.