Programme de colles Quinzaine 7 (semaines du 6/1 et du 13/1)

Chapitre 9 : Matrices
On commence par présenter les matrices ainsi que les opérations associées. Dans un second temps, on se sert des matrices pour donner une assise théorique à la méthode de résolution des systèmes linéaires avec le pivot de Gauss. Enfin, on travaille spécifiquement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on s'interesse à l'inversibilité des matrices.

Des définitions et des notations à comprendre et à maîtriser :
- Vocabulaire des matrices : ligne, colonne, diagonale, matrice carrée, triangulaire supérieure ou inférieure, symétrique, antisymétrique.
- Addition, produit par un scalaire dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Produit de deux matrices dont les tailles sont compatibles, attention : ce produit n'est (en général) ni commutatif, ni intègre.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est composée des matrices élémentaires $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{(k,l)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ avec $(i,j)) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$. *Cette dernière expression illustre une des difficultés de ce chapitre : les notations. Veillez à bien comprendre le rôle de chaque lettre utilisée.*
- Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes : dilatation, transvection et permutation. Elles correspondent à des produits à gauche (pour les opérations sur les lignes) ou à droite (sur les colonnes) par des matrices qui sont inversibles.
- Vocabulaire des systèmes linéaires : colonnes des inconnues, du second membre, système homogène, système compatible ou incompatible.
- Matrices inversibles, groupe linéaire.

Des méthodes à connaître :
- Calculer un produit matriciel.
- Résoudre un système linéaire en appliquant le pivot de Gauss.
- Utiliser la formule du binôme de Newton (attention à la condition de commutativité) pour calculer une puissance.
- Décider l'inversibilité d'une matrice 2×2 à l'aide du déterminant ; le cas échéant donner l'inverse.
- Algorithme pour décider si une matrice de taille 3×3 est inversible et, le cas échéant, calculer l'inverse.

Démonstration à connaître :
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. M est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. On a alors $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- [$\star$] : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

Chapitre 10 : Continuité des fonctions
On donne des définitions précises des limites et on comprend que les différents cas (limites finie ou infinie en un réel, en $+\infty$ ou en $-\infty$) peuvent se formuler d'une seule façon avec la notion de voisinage.
On revoit ensuite ce qui avait été vue en terminale : la continuité et le théorème des valeurs intermédiaires. On l'exploite pour déterminer les images d'intervalles par des fonctions continues.

Des définitions à connaître précisément et à comprendre :
une bonne façon de savoir si on a compris : être en mesure de faire une figure.
- Tous les cas possibles pour les limites, quantifiés avec rigueur.
- Fonction continue en un point, sur un intervalle.
- Prolongement par continuité.

Des résultats à connaître précisément :
- Opérations sur les limites, formes indéterminées (savoir proposer des exemples).
- TVI et applications.

Démonstration à connaître :
- Soit f définie au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et admettant une limite en a.
  Si $f \geq 0$ au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$.
- [$\star$] : preuve du TVI.

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et J_n la matrice $n \times n$ dont tous les coefficients valent 1.
Pour $k \in \mathbb{N}$, déterminer J^k.

Exercice n° 2

1. Trouver $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, non nulle telle que $A^2 = 0$.
2. Trouver $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, dont aucun coefficient n'est nul, telle que $B^2 = 0$.
3. Trouver $C \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, non nulle telle que $C^2 = 0$.
4. Trouver $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice 3, c'est-à-dire telle que $C^3 = 0$ et $C^2 \neq 0$.

Exercice n° 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. L'objectif est de trouver les éventuelles racines carrées de A.

1. On cherche quoi ?
2. Si B est une racine carrée de A, montrer que A et B commutent.
3. En déduire que certains coefficients de B sont nuls.
4. Conclure.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 4

On considère l'équation (E) : $\ln(x) = x^2 - 3$.

1. Prouver que (E) admet au moins deux solutions sur $\mathbb{R}$.
2. Prouver que (E) admet exactement deux solutions sur $\mathbb{R}$.
3. Proposer une fonction `Python` qui prend en paramètre un réel positif ε et renvoie une valeur approchée de la plus petite des solutions de (E) avec une précision ε.

Exercice n° 5

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.