Programme de colles Quinzaine 8 (semaines du 27/1 et du 3/2)

Chapitre 11 : Polynômes
Des définitions et des formules à connaître :
- vocabulaire et notations (degré, polynôme unitaire...)
- arithmétique : divisibilité, division euclidienne, polynôme irréductible, polynôme scindé.
- dérivation : polynôme dérivé, formules de Leibniz et de Taylor.
- lien entre coefficients et racines.

Théorème de Gauss et conséquences :
- Les polynomes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.
- Nature des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
- Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Fractions rationnelles : du vocabulaire et une méthode à connaître pour décomposer en éléments simples.

<u>Démonstrations :</u>
- Soit A et B deux polynômes. Si $A|B$ et $B|A$ alors A et B sont associés.
- Existence et unicité de la division euclidienne [$\star$].
- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Formule de Taylor [$\star$].

Chapitre 12 : Dérivation des fonctions réelles de la variable réelle
Une notion connue et complétée par le cours de PCSI :
- nombre dérivé, dérivée à droite / à gauche, dérivées d'ordres supérieurs, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle.
- calcul de dérivées avec la définition ou par opérations.
- applications à l'approximation locale avec un DL1, à l'étude des variations et à la recherche des extrema.

Des nouveaux théorèmes
- Le théorème de la limite de la dérivée pour « gagner »la dérivabilité en un point.
- Le Théorème de Rolle donne l'existence de zéros de f'.
- Le Theorème des Accroissements Finis, les Inégalités des accroissements finis donnent des informations sur les variations de f selon le comportement de f'.

Convexité : on revoit et on enrichit ce qui a été vu en Terminale. Bien connaître la définition, savoir qu'une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable. Lorsque la fonction f est dérivable deux fois sur Ila convexité est équivalente à la positivité de f'' sur I.

<u>Démonstrations :</u>
- Formule de dérivation d'un produit.
- Théorème de Rolle.
- TAF [$\star$].

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Soit $\Omega = \{P \in \mathbb{C}[X] \ / \ PP' = 18P\}$.

1. Montrer que Ω est non vide.
2. Déterminer Ω.

Exercice n° 2

Décomposer $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

Exercice n° 3

Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) la fraction rationnelle $\dfrac{x^3}{x^3+1}$.

Exercice n° 4

Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions :

$$f(x) = x|x| \qquad \text{et } g(x) = \frac{1}{1+|x|}$$

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Soit $I =]1; +\infty[$ et, pour $x \in I$, $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Prouver que f réalise une bijection entre I et $f(I)$ qu'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice n° 6

Déterminer $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$ tel que la fonction $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \text{ si } x \in [0; 1] \\ ax^2 + bx + c \text{ si } \ > 1 \end{cases}$ soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice n° 7

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Montrer que f est bien définie, déterminer ses poins fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Pour $x \in [\frac{1}{2}; 1]$: montrer que $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Déduire des questions précédentes que u est bien définie, qu'elle converge et précisez sa limite.