Programme de colles Quinzaine 9 (semaines du 24/2 et du 3/3)

Chapitre 13 : Espaces vectoriels
Beaucoup de définitions et d'exemples remarquables à connaître.

— Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels : définitions, exemples, un SEV est lui-même un EV. SEV engendré par une famille de vecteurs.

— Etant donnés deux SEV F et G d'un EV E, la somme $F+G$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$; cet ensemble est aussi un SEV de E.
Si l'écriture $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ est unique (pour tous les $\vec{u}$) alors on dit que la somme est directe et on la note $F \oplus G$. Si, en plus, cette somme vaut E, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

— Familles finies de vecteurs :
  - familles libres ou liées : on peut toujours se ramener à résoudre un système homogène.
  - familles génératrice ou non : cela conduit à dire si un système $AX = B$ a des solutions quel que soit le second membre B.
  - une base est un famille libre et génératrice. On peut alors écrire tous les vecteurs de E de façon unique comme combinaisons linéaire des vecteurs de la base, les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans $\mathcal{F}$, on peut représenter les vecteurs par des colonnes de coordonnées.
    Dans certains espaces de référence, il y a des bases canoniques à connaître.

Quelques propriétés à connaitre et à savoir démontrer :

— Dans un EV, pour tout vecteur $\vec{x}$ on a $0\vec{x} = \vec{0}$.

— Deux SEV F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

— $\mathcal{F} = (\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_n)$ est une base de E si, et seulement si : $\forall \vec{v} \in E,\ \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \ / \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$.

Chapitre 14 : Analyse asymptotique
Comparaison asymptotique de suites ou de fonctions

— Différence fondamentale entre les suites et les fonctions : pour les fonctions il faut impérativement préciser où on travaille.

— Domination : le quotient est borné (localement pour les fonctions). Négligeabilité : la limite du quotient est 0. Equivalence : la limite du quotient est 1.

— Lien entre les relations : un o est un O, un $\sim$ est un O...

— On peut travailler avec les équivalents pour étudier localement un signe, pour obtenir une limite. Les équivalents sont compatibles avec les produits, les quotients, les puissances, les substitutions mais pas avec les additions ni les compositions.

— Equivalents usuels : polynômes (en 0 et en $\pm\infty$), sin et cos (en 0), $\ln(1+x)$ et $\mathrm{e}^x - 1$.

Démonstrations :

— $\ln(n) = o(n)$

— $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$ [$\star$].

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Montrer que f est bien définie, déterminer ses poins fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Pour $x \in [\frac{1}{2}; 1]$: montrer que $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Déduire des questions précédentes que u est bien définie, qu'elle converge et précisez sa limite.

Exercice n° 2

Trouver une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y = z\}$.

Exercice n° 3

a) Prouver qu'une sous-famille d'une famille libre est libre.

b) Prouver qu'une famille qui a une sous-famille liée est liée.

Exercice n° 4

L'ensemble des suites géométriques est-il un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Si oui, en donner une base.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Soit u une suite telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$ et $\ln(\frac{2}{u_n}) \sim \frac{1}{n^2}$.

a) Montrer que u converge vers une limite ℓ qu'on précisera.

b) Donner un équivalent de $(u_n - \ell)$.

Exercice n° 6

Soit $n > 0$, pour $k \in [\![1; n]\!]$ on note $f_k : x \mapsto |x - k|$.
La famille $(f_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ est-elle libre ou liée ?

Exercice n° 7

L'ensemble des suites arithmétiques est-il un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Si oui, en donner une base.