Programme de colles 23 (29/3 - 2/4)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Intégrale de Riemann : si f est continue sur $[a;b]$ alors $\int_{[a;b]} f$ se construit comme limite d'intégrales de fonctions en escalier. Les sommes de Riemann de f convergent alors vers $\int_{[a;b]} f$ (mise en œuvre de la méthode des rectangles à venir en informatique). $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. Formules de Taylor avec reste intégral, de Taylor-Lagrange, de Taylor-Young.

— Espaces vectoriels de dimensions finies : un EV est dit de dimension finie lorsqu'il admet une génératrice finie. Exemples et contre-exemples. Le Théorème de la base extraite a pour conséquence que tout EV de dimention finie admet une base. Le Théorème de la base incomplète indique qu'une famille libre peut être complétée en une base. La dimension d'un EV de dimension finie (non réduit à $\{\vec{0}\}$) est le cardinal commun de toutes les bases de l'EV.
Dans un espace de dimension n, les familles génératrices ont au moins n vecteurs, les familles finies en ont au plus n. De plus, une famille libre ou génératrice de n vecteurs est une base. Les sous-espaces d'un EV de dimension finie n sont également des EV de dimensions finies, leurs dimensions sont inférieures ou égales à n. Cas d'égalité : le sous-espace est l'EV entier.
Formule de Grassmann. Dans un EV de dimension finie, existence (et pas unicité) des supplémentaires, dimension d'un supplémentaire.

— Démonstrations exigibles :
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Formule de Taylor Lagrange (à partir de la Taylor avec reste intégral).
- Si $f \in \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{R})$. $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a. [$\star$]
- Si l'espace vectoriel E est de dimension finie alors toutes ses bases ont le même cardinal.

Exercices

a) Se servir d'un DL pour étudier une limite, justifier la régularité, étudier un comportement local (tangente ou asymptote et positions relatives).

b) Décider si une partie d'un EV en est un SEV ou non.

c) Dans des cas simples, trouver le supplémentaires d'un SEV.

d) Décider si une famille de vecteurs est libre ou liée.

e) Décider si une famille de vecteurs est génératrice ou non.

f) Questions de l'exercice 1 du DS 6 proposé samedi 13 mars.

g) Exercices sur les EV faisant intervenir la dimension *(on commence tout juste : ne pas hésiter à aider).*