E3A1 2018 - Corrigé

Exercice 3

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$.
   Effectuons une comparaison somme/intégrale.
   • Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $x \in [\![i, i+1]\!]$, $i^k \leq x^k$.
   D'où, par positivité de l'intégrale ($i \leq i+1$), on a

$$\int_i^{i+1} i^k dx \leq \int_i^{i+1} x^k dx \quad \text{i.e.} \quad i^k \leq \int_i^{i+1} x^k dx.$$

   En sommant ces inégalités pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$S_n(k) = \sum_{i=1}^{n} i^k \leq \sum_{i=1}^{n} \int_i^{i+1} x^k dx = \int_1^{n+1} x^k dx = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

   • Pour tout $i \geq 2$ pour tout $x \in [\![i-1, i]\!]$, $x^k \leq i^k$.
   D'où, par positivité de l'intégrale ($i - 1 \leq i$), on a

$$\int_{i-1}^{i} x^k dx \leq \int_{i-1}^{i} i^k dx \quad \text{i.e.} \quad \int_{i-1}^{i} x^k dx \leq i^k.$$

   En sommant ces inégalités pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{i=2}^{n} i^k \geq \sum_{i=1}^{n} \int_{i-1}^{i} x^k dx = \int_1^{n} x^k dx = \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

   En ajoutant 1 de part et d'autre, on obtient :

$$S_n(k) \geq 1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

   • On a donc

$$1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1} \leq S_n(k) \leq \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

   En divisant par $n^{k+1} > 0$, on a

$$\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{n^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{n^{k+1}} S_n(k) \leq \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

   Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{k+1}} = 0$ et $\dfrac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} \sim \dfrac{n^{k+1}}{n^{k+1}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$,
   donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{k+1}} + \dfrac{1}{k+1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{k+1}}\right) = \dfrac{1}{k+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{n^{k+1}}\right)$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^{k+1}} S_n(k) = \dfrac{1}{k+1}$.

2. Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance. De plus,

$$\sum_{i=1}^{N} P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{N} P(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k P(X = k) = E(X).$$

3. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, X_1 admet une espérance et une variance (donc un moment d'ordre 2) et

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \frac{N+1}{2} \\
V(X_1) &= \frac{N^2 - 1}{12} \\
E(X_1)^2 &= V(X_1) + (E(X_1))^2 \quad \text{(d'après K-H)} \\
&= \frac{N^2 - 1}{12} + \frac{N^2 + 2N + 1}{4} = \frac{4N^2 + 6N + 2}{12} = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6}.
\end{aligned}$$

4. (a)

```
def simulX():
    return [random.randint(1,10) for i in range(100)]
```

(b)
```
def REALIV():
    L = simulX()
    return [max(L[:i]) for i in range(100)]
```

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.
   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(U_k \geq i) &= P(\min(X_1, \dots, X_k) \geq i) = P((X_1 \geq i) \cap \ldots \cap (X_k \geq i)) \\
&= P(X_1 \geq i) \times \cdots \times P(X_k \geq i) \quad \text{(indépendants)} \\
&= P(X_1 \geq i)^k \quad \text{(même loi)} \\
&= \left(\sum_{j=i}^{N} P(X_1 = j) \right)^k = \left(\sum_{j=i}^{N} \frac{1}{N} \right)^k = \left(\frac{N-i+1}{N} \right)^k.
\end{aligned}$$

   (b) • On a, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $V_{k+1} \geq V_k$, donc, dès que $V_{k_0} = 10$, on a $V_k = 10$ pour tout $k \in [\![k_0, 100]\!]$.
   • De plus, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(V_k = 10) &= 1 - P(V_k \leq 9) \\
&= 1 - P(X_1 \leq 9 \cap ... \cap X_k \leq 9) \\
&= 1 - P(X_1 \leq 9) \times \cdots \times P(X_k \leq 9) \quad \text{(indépendants)} \\
&= 1 - \left(\frac{9}{10} \right)^k
\end{aligned}$$

   et cette quantité tend très vite vers 1, donc la suite (V_k) prend en général très vite la valeur 10.
   (c) D'après la question 2,

$$\begin{aligned}
E(U_k) &= \sum_{i=1}^{N} P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{N-i+1}{N} \right)^k = \frac{1}{N^k} \sum_{i=1}^{N} (N-i+1)^k \\
&= \frac{1}{N^k} \sum_{j=1}^{N} j^k \quad \text{(en posant } j = N-i+1\text{)} \\
&= \frac{1}{N^k} S_k(N)
\end{aligned}$$

   Comme, d'après la question 1, $\frac{1}{N^{k+1}} S_k(N) \underset{N \to +\infty}{\to} \frac{1}{k+1} \neq 0$, on a

$$S_k(N) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}, \quad \text{et donc} \quad E(U_k) = \frac{1}{N^k} S_k(N) \underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{N}{k+1}.$$

6. (a) • Les variables X_i sont indépendantes.
   En posant $f : x \mapsto N+1-x$, on a, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $Y_i = f(X_i)$, donc les variables $(Y_1, \dots, Y_N)$ sont indépendantes.
   • Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$, donc $Y_i(\Omega) = (N+1-X_i)(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
   De plus, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$P(Y_i = k) = P(N+1-X_i = k) = P(X_i = \underbrace{N+1-k}_{\in [\![1,N]\!]}) = \frac{1}{N},$$

   donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.
   (b) On a

$$\begin{aligned}
U_k &= \min(X_1, \dots, X_k) = -\max(-X_1, \dots - X_k) \\
&= N+1 - \max(N+1-X_1, \dots, N+1-X_k) \\
&= N+1 - \max(Y_1, \dots, Y_k) = N+1 - V_k(Y),
\end{aligned}$$

   donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(U_k) = N+1 - E(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad E(V_k(Y)) = N+1 - E(U_k).$$

   De plus, par propriété de la variance, comme $U_k = N+1 - V_k(Y)$, on a

$$V(U_k) = (-1)^2 V(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad V(V_k(Y)) = V(U_k).$$

   Enfin, comme les X_i et les Y_i suivent les mêmes conditions (d'indépendance et de loi), V_k et $V_k(Y)$ ont la même loi, donc la même espérance et la même variance, donc :

$$E(V_k) = N+1 - E(U_k) \quad \text{et} \quad V(V_k) = V(U_k).$$

7. (a) $U_2+V_2=\min(X_1,X_2)+\max(X_1,X_2)=X_1+X_2$ et $U_2V_2=\min(X_1,X_2)\times\max(X_1,X_2)=X_1X_2$.

   (b) Par suite,

$$V(U_2+V_2)=V(X_1+X_2)\underset{\text{ind}}{=}V(X_1)+V(X_2)=\frac{N^2-1}{6}$$

et

$$E(U_2V_2)=E(X_1X_2)\underset{\text{ind}}{=}E(X_1)E(X_2)=\frac{(N+1)^2}{4}.$$

   (c) On a $V(U_2)=V(V_2)$ d'après la question 6b.
De plus,

$$V(U_2+V_2)=V(U_2)+V(V_2)+2\mathrm{Cov}(U_2,V_2),$$

donc

$$\begin{aligned}2V(U_2)&=V(U_2+V_2)-2\mathrm{Cov}(U_2,V_2)=\frac{N^2-1}{6}-2\frac{(N^2-1)^2}{36N^2}\\&=\frac{3N^4-3N^2-N^4+2N^2-1}{18N^2}=\frac{2N^4-N^2-1}{18N^2},\\ \text{donc}\quad V(U_2)=V(V_2)&=\frac{2N^4-N^2-1}{36N^2}.\end{aligned}$$

   (d) $\rho_2(N)=\dfrac{\mathrm{Cov}(U_2,V_2)}{\sigma(U_2)\sigma(V_2)}=\dfrac{(N^2-1)^2}{2N^4-N^2-1}$.

   (e) $\rho_2(N)=\dfrac{(N^2-1)^2}{2N^4-N^2-1}\underset{N\to+\infty}{\sim}\dfrac{N^4}{2N^4}\underset{N\to+\infty}{\to}\dfrac{1}{2}$.

8. (a) *Qui est ce N ici ? ? On va supposer que X est à valeurs dans $[\![1,N]\!]$...*
Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet un moment d'ordre 2 et

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(X\geq i)&=\sum_{i=1}^{N}\sum_{k=i}^{N}(2i-1)P(X=k)\\&=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}(2i-1)P(X=k)\\&=\sum_{k=1}^{N}\left(P(X=k)\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right)\\&=\sum_{k=1}^{N}P(X=k)k\frac{1+(2k-1)}{2}\quad\text{(somme de termes d'une suite arithmétique de raison 2)}\\&=\sum_{k=1}^{N}k^2P(X=k)=E(X^2).\end{aligned}$$

   (b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}E(U_k^2)&=\sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(U_k\geq i)=\sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k\\&=\frac{1}{N^k}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)(N+1-i)^k=\frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}(2(N+1-j)-1)j^k\quad\text{(en posant } j=N+1-i)\\&=\frac{1}{N^k}\left((2N+1)\sum_{j=1}^{N}j^k-2\sum_{j=1}^{N}j^{k+1}\right)=\frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N)-2S_{k+1}(N)\right).\end{aligned}$$

   (c) D'après la formule de K-H,

$$\begin{aligned}V(U_k)&=E(U_k)^2-(E(U_k))^2\\&=\frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N)-2S_{k+1}(N)\right)-\left(\frac{1}{N^k}S_k(N)\right)^2\end{aligned}$$

(d) D'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^{k+1}}{k+1}$, donc $S_k(N) = \dfrac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})$.

Par suite,

$$\begin{aligned}
V(U_k) &= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)\right) - \left(\frac{1}{N^k}S_k(N)\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)\left(\frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})\right) - 2\frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2})\right) - \left(\frac{N}{k+1} + o(N)\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^k}\left(2\frac{N^{k+2}}{k+1} + \frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1}) - 2\frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2})\right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= \frac{1}{N^k}\left(2N^{k+2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + o(N^{k+2})\right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= 2N^2\frac{1}{(k+1)(k+2)} + o(N^2) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= N^2\frac{k}{(k+1)^2(k+2)} + o(N^2) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}N^2.
\end{aligned}$$