Chapitre 13 - Espaces vectoriels

Dans tout-ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Espaces et sous-espaces vectoriels

1.1 Espace Vectoriel : définition

Définition
Un **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** est un ensemble non vide E muni des **opérations** suivantes :

— une **addition entre ses éléments** qui soit :
1. associative :

2. commutative :

3. qui admette un élément neutre noté $\vec{0}$:

4. telle que tout élément de E ait un opposé :

— une **multiplication par les scalaires** qui soit :
1. associative :

2. distributive par rapport **aux** additions :

3. respecte le scalaire 1 :

Vocabulaire et notation :
Les objets que l'on manipule dans l'étude des espaces vectoriels sont de deux types :
- les éléments de $\mathbb{K}$ qu'on appelle **les scalaires** ;
- les éléments de E qu'on appelle **les vecteurs**.

Pour marquer la différence entre ces deux types d'objets, on pourra noter les vecteurs avec une flèche. Progressivement, on arrêtera de les écrire (sauf pour la géométrie du plan et de l'espace). Sans flèche, Le vecteur nul sera noté 0_E pour le distinguer du scalaire nul 0.

Remarque : le choix du vocabulaire n'est pas anodin ; on a créé des ensembles dans lesquelles les règles de calcul sont les mêmes qu'en géométrie du plan et de l'espace. On s'aidera de représentations géométriques pour représenter des situations *a priori* non géométriques.

1.2 Espaces Vectoriels : exemples de référence

Il faut s'assurer que les conditions demandées par la définition sont bien vérifiées. Le plus souvent, c'est un travail relativement fastidieux mais qui ne pose pas de difficulté. On détaillera un des exemples ; pour les autres on se limite à donner le vecteur nul ainsi que l'opposé d'un vecteur quelconque.

1.2.1 Vecteurs du plan, vecteurs de l'espace

Proposition

- L'ensemble des vecteurs d'un plan $\mathcal{P}$, noté $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$, noté $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est la donnée de trois informations :

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ ou $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. $-\vec{u}$ est le vecteur

Le vecteur nul est l'unique vecteur ayant

Remarque : il existe d'autres opérations avec les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Attention : on a l'habitude de confondre les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ avec

1.2.2 Espace vectoriel $\mathbb{K}^n$

Remarque : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les éléments de $\mathbb{K}^n$ sont les n-uplets d'éléments de $\mathbb{K}$. Un élément de $\mathbb{K}^n$ est de la forme $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in \mathbb{K}$ (pour $i \in [\![1; n]\!]$).

Proposition

$\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1.2.3 Espace vectoriel des matrices

Proposition

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque : Les vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont les matrices ; voici typiquement un contexte dans lequel on ne mettra jamais de flèches sur les vecteurs.

1.2.4 Espace vectoriel des polynômes

Proposition
$\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque : il existe d'autres opérations dans $\mathbb{K}[X]$:

1.2.5 Espace vectoriel des applications à valeurs dans $\mathbb{K}$

Définition
Soit Ω un ensemble non-vide.
On note $\mathbb{K}^\Omega$ l'ensemble des applications définies sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Proposition
Soit Ω un ensemble non-vide. $\mathbb{K}^\Omega$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Démonstration

Vérifions à-présent que les conditions de la définition sont bien vérifiées.

— Soit f et g deux applications de $\mathbb{K}^\Omega$. $f+g$ est l'élément de $\mathbb{K}^\Omega$ défini par :

  $f(x)$ et $g(x)$ sont dans $\mathbb{K}$ et donc l'addition dans $\mathbb{K}^\Omega$ va hériter des propriétés de l'addition dans $\mathbb{K}$:

  1. Associativité :
  2. Commutativité :
  3. L'élément neutre est
  4. Soit $f \in \mathbb{K}^\Omega$. L'application opposée de f est

— Soit $f \in \mathbb{K}^\Omega$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. λf est
  $\lambda f(x)$ est le produit de deux éléments de $\mathbb{K}$ et donc, ici aussi, les propriétés de la multiplication dans $\mathbb{K}$ vont garantir les conditions demandées par la définition d'espace vectoriel :

  1. Associativité :
  2. Distributivité par rapport aux additions :
  3.

Remarques :

a) Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$. Il suit que l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on le note $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

b) On dispose d'une autre opération dans $\mathbb{K}^{\Omega}$:

1.3 Deux propriétés des espaces vectoriels

Tout d'abord des règles de calcul qui correspondent à l'intuition :

Proposition
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\vec{u} \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

i. $0\vec{u} =$ et $\lambda\vec{0} =$

ii. $\lambda\vec{u} = \vec{0}$ si, et seulement, si :

iii. L'opposé de $\vec{u}$ est unique, c'est le vecteur $-1\vec{u}$, que l'on notera simplement $-\vec{u}$.

Démonstration
Soit $\vec{u} \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

i. On a

ii. Supposons que $\lambda\vec{u} = \vec{0}$. Si $\lambda \neq 0$ alors, en multipliant par $\frac{1}{\lambda}$, on a $\vec{u} = \vec{0}$.
La réciproque est donnée par i.

iii. L'existence de l'opposé de $\vec{u}$ est assurée par la définition de la structure d'espace vectoriel.

Rappel sur le produit cartésien d'ensembles :

- Etant donnés deux ensembles non vides A et B, le **produit cartésien** de A et B est

- On généralise par récurrence à un produit de n ensembles $A_1, \dots, A_n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\prod_{i=1}^{n} A_i =$$

Proposition
Soit E et F deux ensembles ayant des structures de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
On définit sur l'ensemble produit $E \times F$ les opérations suivantes :

- **Addition par composantes** :
  Pour tous (e_1, f_1) et (e_2, f_2) dans $E \times F$, on pose $(e_1, f_1) + (e_2, f_2) = (e_1 + e_2, f_1 + f_2)$.
- **Produit de chaque composante par un scalaire** :
  Pour tous $(e, f) \in E \times F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on pose $\lambda(e, f) = (\lambda e, \lambda f)$.

Muni de ces lois, $E \times K$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel dont le vecteur nul est :

Remarques :

a) On prolonge sans difficulté cette proposition à un produit fini de $\mathbb{K}$-espace vectoriels : si $E_1, \dots E_n$ sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $\prod_{i=1}^{n} E_i$ a également une structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel avec les opérations définies par composantes.

b) Cela justifie (à nouveau) la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{K}^n$.

2 Sous-espaces vectoriels

Dans la suite, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Stabilité par combinaison linéaire

Définition

— Une **combinaison linéaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E est un vecteur de la forme

— De façon plus générale, si $\vec{u}_1, \dots \vec{u}_n$ est une famille finie de vecteurs de E alors une combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est un vecteur de la forme

Exemples :

1. On travaille dans le plan muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j})$. Le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(5, -2)$ est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$: $\vec{u} = 5\vec{i} + (-2)\vec{j}$.
   De façon générale, tout vecteur $\vec{v}$ du plan est combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et les coefficients de cette combinaison linéaire sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.
2. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la fonction f définie par $f(x) = 3\cos x + 7\sin x$ est combinaison linéaire de cos et sin.

Définition

Soit $F \subset E$. On dit que F est un **sous-espace** de E lorsque :

- F est **non-vide**.
- F est **stable par combinaison linéaire** :

Exemples :

a) Soit E un espace vectoriel. $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de E :

b) $\mathbb{R}^+$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}$. En effet,

Avant de donner d'autres exemples, on commence par une propriété très utile :

Proposition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\vec{0}_E$ est dans tous les sous-espaces vectoriels de E.

Démonstration

Déjà, E admet des sous-espaces vectoriels car

Soit F un sous-espace vectoriel de E

Méthode (Lorsqu'on veut voir si F est un SEV de E)
On commence par regarder si $\vec{0}_E$ est dans F :
- si oui : F est non vide et il reste à voir la stabilité par combinaison linéaire ;
- si non : on conclut directement que F n'est pas un SEV de E.

Exemples :

a) L'ensemble D_n des matrices diagonales de taille n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

b) D'autres sous-espaces de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$

d) L'ensemble Γ des polynômes de degré 3

e) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{K}_n[X]$

f) $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

g) D'autres sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$:

Remarque : le théorème qui suit donne son sens à la notion de sous-espace vectoriel :

Théorème
Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors, F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Remarque : l'idée qu'il faut se faire des espaces vectoriels est que ce sont les ensembles dans lesquels on peut faire des combinaisons linéaires.

2.2 Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

Définition
Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E.
- On note $\text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$:

$$\text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n) = \{\lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n / (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

- $\text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant la famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. On l'appelle **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$.

Le second point de la définition comporte une assertion à vérifier :

Démonstration
Soit $\mathcal{F} = (u_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$. Montrons que $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E :
- En prenant $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}}$, on a $\vec{0} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

— Soit deux éléments de $\text{Vect}(\mathcal{F})$: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$ et $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i$.
Soit α et β deux scalaires, il faut montrer que $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

$$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i + \beta \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\underbrace{\alpha\lambda_i + \beta\mu_i}_{\in \mathbb{K}})\vec{u}_i$$

$\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$ est donc une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$: $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} \in \text{Vect}(\mathcal{F})$.

Finalement, $\text{Vect}(\mathcal{F})$ est un sous-espace vectoriel de E.
Par définition, tout sous-espace de E qui contient $\mathcal{F}$ contient $\text{Vect}(\mathcal{F})$. ■

Remarque : On adopte la convention $\text{Vect}(\emptyset) = \left\{\vec{0}\right\}$.
Cette convention est cohérente : une somme vide est égale à l'élément neutre de l'addition. Par ailleurs, elle permet de prolonger le résultat démontré ci-dessus : une famille vide génère $\left\{\vec{0}\right\}$ qui est un sous-espace vectoriel.

Définition
Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **colinéaires**

Remarque :

Définition
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
- Si $F = \text{Vect}(\vec{u})$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors on dit que F est une **droite vectorielle** de E.
- Si $F = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et non colinéaires, alors on dit que F est un **plan vectoriel** de E.

Exemples :

a) On travaille dans l'espace muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit le vecteur $\vec{n}(1, 2, -3)$, on considère Γ : l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{n}$.

b) $\mathbb{K}_1[X]$ est un plan vectoriel de $\mathbb{K}[X]$:

$$\mathbb{K}_1[X] =$$

c) Ensemble des nombres complexes.
— $\mathbb{C}$ peut être envisagé en tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel et alors $\mathbb{C} = \text{Vect}(1, \mathrm{i})$ car tout complexe z s'écrit $\text{Re}(z) \times 1 + \text{Im}(z) \times \mathrm{i}$ qui est une combinaison linéaire à coefficients réels de 1 et i qui sont évidemment non-colinéaires. <u>$\mathbb{C}$ est donc un plan vectoriel réel</u>.
— $\mathbb{C}$ peut également être envisagé comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et alors $\mathbb{C} = \text{Vect}(1)$ car tout complexe λ vaut $\lambda \times 1$. <u>$\mathbb{C}$ est donc une droite vectorielle complexe</u>.

Proposition

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à p inconnues et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.
- L'ensemble des solutions sur un intervalle I d'une équation différentielle linéaire homogène est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^I$.

Remarque : Les exemples suivants illustrent la proposition, il sont l'occasion de vérifier que les méthodes qui ont été vues dans les chapitres précédents sont mémorisées.

Exemples :

a) Le système linéaire $\mathcal{S} : \left\{ \begin{array}{rcl} x+3y-z & = & 0 \\ 2x+5y+3z & = & 0 \end{array} \right.$ a pour solution une droite vectorielle. En effet :

b) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y' - t^2 y = 0$ est une droite vectorielle. En effet,

c) L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire $y'' + y = 0$ est

Méthode (Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel)

- On peut toujours vérifier que les axiomes de la définition d'un espace vectoriel sont vérifiés.
- Il est souvent beaucoup plus rapide de montrer que F est un sous-espace vectoriel d'un exemple de référence. Pour ce faire, il y a deux stratégies :
  - On montre que $\vec{0} \in F$ et que F est stable par combinaisons linéaires.
  - F est un sous-espace vectoriel si on parvient à écrire $F = \text{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

2.3 Somme de sous-espaces vectoriels

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, F et G des sous-espaces vectoriels de E.

Proposition

$F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration

- $\underline{F \cap G \neq \emptyset}$:
- $\underline{F \cap G \text{ est stable par combinaison linéaire}}$:

Exemple : L'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, l'ensemble des fonctions paires est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(Les vérifications sont laissées en exercice.)* Il suit que l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ qui sont paires est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Attention : le plus souvent, $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.
Prenons un contre-exemple :

Définition

On appelle **somme de F et G** le sous-ensemble de E dont les éléments se décomposent en une somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$F + G = \{\vec{u} \in E \ / \ \exists \ (\vec{u}_F, \vec{u}_G) \in F \times G \ , \ \vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G\}$$

Proposition

$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne $F \cup G$.

Exemple : On travaille dans $\mathbb{R}^3$ et on considère $F = \text{Vect}((1,0,0))$ et $G = \text{Vect}((0,1,0))$.
$F + G$ est l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de la forme $\vec{x} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$. On a donc $\vec{x} = \lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$ avec λ et μ des réels. Il suit que $F + G \subset \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.
L'inclusion réciproque est évidente : tout vecteur de $\text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$ est par définition de la forme $\lambda(1,0,0) + \mu(0,1,0)$ et appartient donc à $F + G$.
Finalement, $F + G = \text{Vect}((1,0,0),(0,1,0))$.

Définition

- La somme $F + G$ est dite **directe** lorsque la décomposition $\vec{u} = \vec{u}_F + \vec{u}_G$ est **unique**. On note alors $F \oplus G$.
- On dit que F et G sont **supplémentaires** lorsque $F \oplus G = E$.

Exemple : l'ensemble des fonctions paires et l'ensemble des fonctions impaires sont des sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(On le verra en exercice).*

Proposition

F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

Démonstration

■

Remarque : il est souvent plus facile de montrer que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ que de prouver l'unicité de la décomposition des vecteurs de $F + G$ comme somme d'éléments de F et de G.

Méthode (Pour prouver que F et G sont supplémentaires dans E)
Il y a deux étapes :

1. On prouve que $F \cap G = \{\vec{0}\}$ (on en déduit que la somme est directe).
2. Pour un vecteur quelconque $\vec{x} \in E$ il faut prouver que $\vec{x}$ est dans $F+G$ (on a alors $E \subset F+G$, l'inclusion réciproque étant évidente on en déduit $F+G=E$).

Exemple : Dans $\mathbb{K}^2$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires alors $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ et $\mathrm{Vect}(\vec{v})$ sont supplémentaires.

3 Familles finies de vecteurs

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, n un entier naturel non nul.
On considère une famille finie de vecteurs de E : $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$.

3.1 Familles libres ou liées

Définition

— La famille $(\vec{u}_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est dite **libre** (de E) lorsque son unique combinaison linéaire nulle est triviale (avec tous les coefficients nuls). Autrement dit :

— Dans le cas contraire, la famille est dite **liée**.

Remarque : le contraire de « Tous les λ_i sont nuls » est

Exemples :

a) Dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ la famille $(\cos, \sin, \exp)$ est libre.

b) On travaille dans l'espace muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et on considère la famille :$(\vec{u}(1,1,-2) \quad ; \quad \vec{v}(3,1,-5) \quad ; \quad \vec{w}(-1,1,1))$.

c) Dans $\mathbb{K}[X]$, la famille $(3X+1, 2X)$ est libre. En effet :

Proposition
Soit une famille de polynômes non-nuls $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathbb{K}[X]$.
Si $0 \leq \deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$ alors cette famille est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : lorsque $\deg(P_1) < \dots < \deg(P_n)$, on dit que $(P_1, \dots, P_n)$ est **échelonnée en degré**.

Exemples :

1. La famille $(5, X^2+X, X^3-X)$ est échelonnée en degré, donc elle est libre.
2. La famille $(X^2+X, X^3-2X^2, X^3+X^2-X)$ n'est pas échelonnée en degré, ce qui ne permet pas de conclure si elle est libre ou liée. *(Exercice : prouvez qu'elle est libre).*

Méthode (Pour savoir si une famille de vecteurs est libre ou liée)

- On peut toujours se servir de la définition : on prend une combinaison linéaire nulle des vecteurs et on cherche à décider si ses coefficients sont nécessairement nuls. (Cela conduit à la résolution d'un système linéaire homogène).
- Si un des vecteurs est combinaison linéaire des autres alors la famille est liée (c'est d'ailleurs une équivalence mais l'implication réciproque sert rarement).

3.2 Familles génératrices ou non ; bases

Définition
Soit F un sous-espace vectoriel de E.
La famille $(\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est dite **génératrice de** F lorsque

Remarque : toute famille est génératrice de l'espace qu'elle engendre : $(\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est génératrice de $\text{Vect}\left((\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}\right)$.

Méthode (Pour montrer qu'une famille $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de E)
Deux stratégies sont possibles :

— on peut montrer qu'elle génère tout vecteur de l'espace E ;

— si on dispose d'une autre famille $(\vec{v}_i)_{1 \leq i \leq p}$ dont on sait qu'elle est génératrice de E, il suffit de montrer que les $\vec{v}_i$ sont générés par la famille $(\vec{u}_i)_{1 \leq i \leq n}$.

Définition
On dit que la famille $(\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une **base** de E lorsqu'elle est

Exemples : dans certains espaces de référence, il y a des bases qui sont *naturelles*, on les appelle **bases canoniques**.

a) Dans $\mathbb{K}^2$:

b) Dans $\mathbb{K}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$) :

c) Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (avec $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$) :

d) Dans $\mathbb{K}_n[X]$:

Remarque : il existe d'autres bases pour ces espaces. Par exemple, $(1, 1+X, X+X^2, \ldots, X^{n-1}+X^n)$ est aussi une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition

Soit $\mathcal{B} = (\vec{u}_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une famille de vecteurs de E. On a équivalence entre :

i. $\mathcal{B}$ est une base ;

ii. tout $\vec{v} \in E$ s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$:

Démonstration

-

-

Méthode (Pour prouver que la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est une base de E)

Il y a deux stratégies :

- On peut vérifier que les conditions de la définition sont vérifiées, c'est-à-dire que la famille est libre **et** génératrice de E.
- Il est parfois plus simple de prouver que tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'écrit **de façon unique** comme combinaison linéaire de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$.

Définition
Soit $\mathcal{B} = (\vec{u_i})_{1\leq i\leq n}$, une base de E.

D'après la proposition précédente, tout vecteur $\vec{v} \in E$ s'écrit de façon unique $\vec{v} = x_1\vec{u_1} + \cdots + x_n\vec{u_n}$ avec $(x_i) \in \mathbb{K}^n$.

Avec ces notations :
— $x_1, \ldots, x_n$ sont les

— Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x_i\vec{u_i}$ est est la **composante** de $\vec{v}$ selon $\vec{u_i}$.

— $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la **matrice colonne des coordonnées** de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$, notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{v})$.

Remarques :
a) on a supposé l'existence d'une base $\mathcal{B}$, ce qui semble naturel mais n'est pas évident dans le cas général. On le prouvera en dimension finie.
b) Il faut faire le parallèle avec la géométrie du plan ou de l'espace : représenter des vecteurs par leurs coordonnées est naturel.

Exemple : on travaille dans $\mathbb{K}_2[X]$. On note $\mathcal{B}_{\text{can}}$ sa base canonique et $\mathcal{F} = (X^2 + X + 1, 3X - 1, 2)$.

a) Rappeler $\mathcal{B}_{\text{can}}$.

b) Prouver que $\mathcal{F}$ est une autre base de $\mathbb{K}_2[X]$.

c) Soit $P = X^2 + 2X - 1$. Donner les matrices colonnes des coordonnées de P dans $\mathcal{B}_{\text{can}}$ et dans $\mathcal{F}$.

d) P est à présent un vecteur quelconque de $\mathbb{K}_2[X]$: $P = aX^2 + bX + c$. Donner $\mathrm{Mat}_{\text{can}}(P)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(P)$.

e) Quelle opération matricielle permet de passer de $\mathrm{Mat}_{\text{can}}(P)$ à $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(P)$?

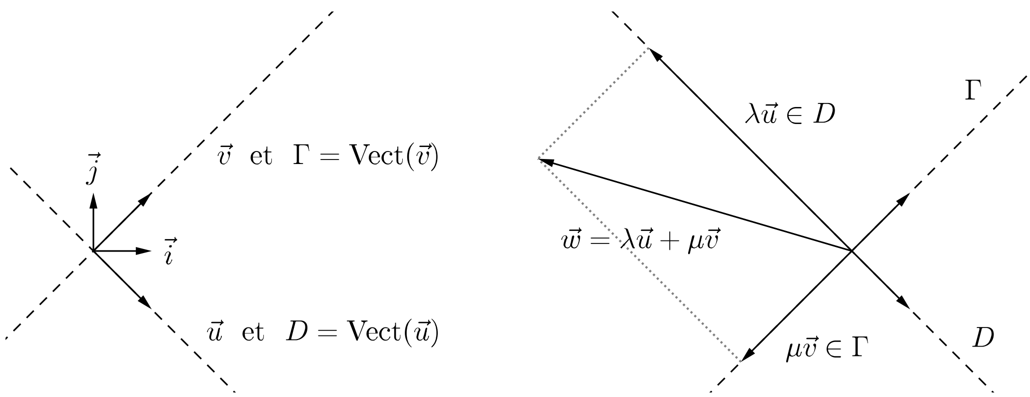
3.3 Bases et sommes directes

Proposition
Soit F et G deux sous-espaces de E qui sont en somme directe.
On suppose de plus que $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ et $\mathcal{B}_G = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_p)$ sont des bases de F et G. Alors,

De plus, on dit que cette base est **adaptée** à $F \oplus G$, on la note $(\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G)$.

Exemple : On travaille dans le plan muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$. On considère vecteur $\vec{u}(1, -1)$ et D la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(\vec{u})$. $(\vec{u})$ est donc une base de D.
Soit Γ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$. Γ est la droite vectorielle d'équation $x - y = 0$, le vecteur $\vec{v}(1, 1)$ en est un vecteur non nul (on a choisi arbitrairement des coordonnées différentes de $(0, 0)$ qui satisfont l'équation de Γ).$(\vec{v})$ est donc une base de Γ.
D et Γ sont supplémentaires car leur intersection est réduite à $\{\vec{0}\}$ et la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est génératrice du plan. $\mathcal{B}' = (\vec{u}, \vec{v})$ est donc une base du plan qui est adaptée à la somme $D \oplus \Gamma$.

À quoi cela sert-il ?
Si l'on cherche à effectuer la projection orthogonale d'un vecteur $\vec{w}$ sur D, il est beaucoup plus commode d'avoir la décomposition de $\vec{w}$ dans $\mathcal{B}'$ que dans $\mathcal{B}$. En effet, si $\vec{w} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ alors son projeté orthogonal sur D est $\lambda\vec{u}$.



Proposition
Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille libre de E, soit $1 \leq k < n$.
Les sous-espaces $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots \vec{u}_k)$ et $\mathrm{Vect}(\vec{u}_{k+1}, \ldots, \vec{u}_n)$ sont

Remarque : la démonstration est laissée en exercice.