Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Régularité des fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$.

I.1 Dérivabilité

Définition 1.

Soit I un intervalle réel.
Une application $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est dite **dérivable** en $a \in I$ si la limite suivante existe et est finie :
$\boxed{\lim_{x\to a} \frac{1}{x-a}(\overrightarrow{f}(x) - \overrightarrow{f}(a)) = \ell}$
Si tel est le cas, on note $\overrightarrow{f}'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{f}(a)$ la valeur de cette limite, et on l'appelle **vecteur vitesse** de $\overrightarrow{f}$ en a.

Proposition 1 (DL1 vectoriel)**.**

Si $\overrightarrow{f}$ est dérivable en a, alors :

$$\overrightarrow{f}(a+h) \underset{h\to 0}{=} \overrightarrow{f}(a) + h\overrightarrow{f}'(a) + \overrightarrow{o}(h)$$

démonstration : cas $n = 2$:
On sait que $x(a+h) \underset{h\to 0}{=} x(a) + hx'(a) + o(h)$ et $y(a+h) \underset{h\to 0}{=} y(a) + hy'(a) + o(h)$,
donc vectoriellement : $\begin{pmatrix} x(a+h) \\ y(a+h) \end{pmatrix} \underset{h\to 0}{=} \begin{pmatrix} x(a) \\ y(a) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'(a) \\ y'(a) \end{pmatrix} + \overrightarrow{o}(h)$ □

Remarque 1. Toute fonction dérivable est continue.

Remarque 2. Une fonction est dérivable ssi elle admet un DL1.

Proposition 2.

Toute combinaison linéaire de fonctions dérivables est dérivable.

démonstration : par linéarité de la dérivation des composantes.

I.2 Les espaces $\mathcal{C}^k$

Définition 2.

Une application $\overrightarrow{f} : I \to \mathbb{R}^n$ est dite **de classe $\mathcal{C}^k$** en $a \in I$ les fonctions $\overrightarrow{f}, \overrightarrow{f}', \dots, \overrightarrow{f}^{k-1}$ sont dérivables en a et si $\overrightarrow{f}^{(k)}$ est continue en a.

Proposition 3.

Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.

On note $\boxed{\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)}$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^k$ en tout point de I.

Remarque 3. $\overrightarrow{f}''(a)$ est le vecteur accélération :
$\overrightarrow{f}(a+h) \underset{h\to 0}{=} \overrightarrow{f}(a) + h\overrightarrow{f}'(a) + \frac{h^2}{2}\overrightarrow{f}''(a) + \overrightarrow{o}(h^2)$

On note $\boxed{\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R}^n)}$ l'espace vectoriel des applications de classe $\mathcal{C}^k$ pour tout k.

II. Arcs paramétrés

Cadre : $E=\mathbb{R}^2$ (resp.$E=\mathbb{R}^3$) muni du repère orthonormé direct $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ (resp. $\mathcal{R}=(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$).

On pourra identifier (abusivement) les vecteurs de E à leurs vecteurs de $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui les representent dans la base canonique (resp.$\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$).

II.1 Définitions

Définition 3.

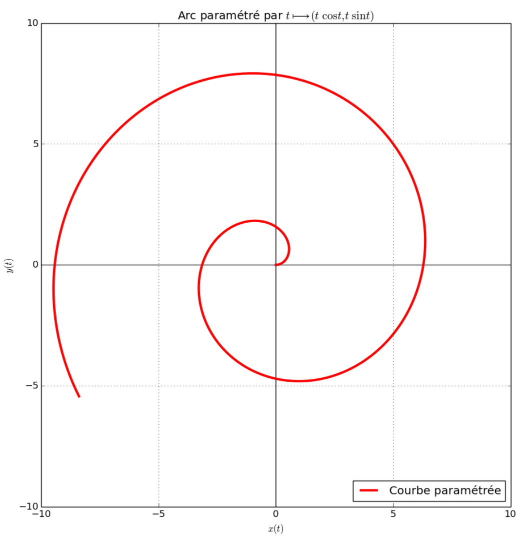
On appelle **arc paramétré** toute application $\gamma : I \longrightarrow E$ continue, avec I intervalle réel.

Remarque 4. On appelle **courbe paramétrée** (continuement) tout ensemble Γ de points de E tel qu'il existe I un intervalle réel, et $\gamma : I \to E$ continue tels que :

$$\Gamma=\{\gamma(t);\ t\in I\}$$

On dit aussi que γ est une **paramétrisation** (continue) de Γ.

exemple 1. Dans l'espace, l'arc paramétré $F : [0,9\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t\longmapsto (t\cos(t), t\sin(t))$ a pour graphe :



exemple 2. Dans le plan, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{d}(3,4)$ peut être paramétrée par $F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ t\longmapsto(1+3t,-2+4t)$

exemple 3. Dans l'espace, la droite $\mathcal{D}$ passant par $A(1,0,-2)$ et dirigée par $\overrightarrow{d}(3,4,5)$ correspond à l'arc paramétré$F:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ t\longmapsto(1+3t,-4t,-2+5t)$

Remarque 5. Interprétation : tout arc paramétrée correspond à la trajectoire d'un mobile : **cinématique**

Définition 4.

On appelle **arc plan** toute application $F : I \longrightarrow \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R}),\ t\longmapsto \begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}$ continue.

On dit alors que F est une paramétrisation de $\Gamma=\{F(t),\ t\in I\}$.

Définition 5.

Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Un arc paramétré $\gamma : I\to E$ est dit **de classe** $\mathcal{C}^k$ si γ est de classe $\mathcal{C}^k$.
On dit alors que γ est une paramétrisation de classe $\mathcal{C}^k$ de la courbe $\Gamma=\gamma(I)$

II.2 Paramétrisations régulières

Définition 6.

Un arc paramétré $\gamma : I \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dit **régulier** si $\gamma' : I \to E$ ne s'annule pas sur I.

Définition 7.

Soit $\gamma : I \to E$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I, le **vecteur vitesse** à l'instant t_0 est le vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$.

Notation : Le vecteur vitesse $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$ à l'instant t_0 peut également être noté $D\gamma(t_0)$. On a $\overrightarrow{\gamma'}(t_0) = D\gamma(t_0) = \boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left[\gamma(t_0+h) - \gamma(t)\right]}$

Il s'identifie au vecteur colonne $\boxed{\overrightarrow{Grad(\gamma)}(t_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ \dfrac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}t}(t_0) \\ \dfrac{\mathrm{d}\gamma_3}{\mathrm{d}t}(t_0) \end{pmatrix}}$ qui est appelé (vecteur) **gradient** en t_0 de $\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}$.

Définition 8.

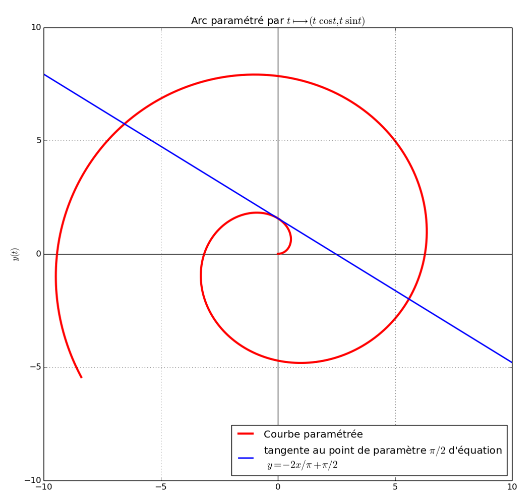
Soit $\gamma : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout t_0 de I, la **tangente** à la courbe au point de paramètre t_0 est la droite passant par le point $\gamma(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{\gamma'}(t_0)$

exemple 4. Pour la courbe paramétrée par $F : [0, 9\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto (t\cos(t), t\sin(t))$, la tangente au point de paramètre t_0 passe par le point $(t_0\cos(t_0), t_0\sin(t_0))$ et est dirigée par le vecteur $(\cos(t_0) - t_0\sin(t_0), \sin(t_0) + t_0\cos(t_0))$

Pout $t_0 = \dfrac{\pi}{2}$, c'est la droite passant par le point $A(0, \dfrac{\pi}{2})$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{t}(-\dfrac{\pi}{2}, 1)$.

Elle a pour équation cartésienne $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = 0$, pour $M(x,y)$, soit

$$y - \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{2}x = 0$$



Proposition 4 (D.L.1)**.**

Soit $\gamma : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^1$. Au voisinage de t_0 dans I, on a :
$\gamma(t) \underset{t\to t_0}{=} \gamma(t_0) + (t - t_0)\ \gamma'(t_0) + \overrightarrow{o}((t-t_0))$
ou encore
$\gamma(t_0+h) \underset{h\to 0}{=} \gamma(t_0) + h\ \gamma'(t_0) + \overrightarrow{o}((h))$

Définition 9.

Soit $\gamma : I \to E$ un arc régulier de classe $\mathcal{C}^2$. Pour tout $t_0 \in I$, le **vecteur accélération** à l'instant t_0 est le vecteur $\overrightarrow{\gamma}''(t_0)$
.

II.3 Méthode d'étude d'un arc paramétré par $(x(t), y(t))$

Etant donné l'expression de $(x(t), y(t))$:

1. On détermine l'**ensemble de définition** Δ commun de x et y.
2. En cas de **périodicité** commune de x et y ,on se contente de faire l'étude sur un intervalle Δ_2 de longueur T si x et y sont T-périodiques.
3. Parfois, on peut trouver des **symétries**, par exemple si $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$, il y a une symétrie par rapport à l'axe (Ox), et on peut réduire l'étude à $\Delta_2 \cap [0, +\infty[$ etc...
4. On détermine les **points réguliers**.
5. On dresse un **grand tableau de variations** avec dans cet ordre t, $x'(t)$,$x(t)$, $y(t)$, $y'(t)$

   Lorsque $x'(t)$ s'annule en un point régulier, la tangente est verticale. Lorsque $y'(t)$ s'annule en un point régulier, la tangente est horizontale.
6. **On trace l'arc paramétré**.

H.P. *N.B. : Lorsqu'au voisinage d'une valeur t_0 finie ou infinie il y a des limites infinies, ou si le point de paramètre t_0 n'est pas régulier, on tente une interprétation géométrique (asymptote pour des limites infinies, D.L. et tangente sinon).*
Ces techniques ne sont pas exigibles des étudiants PC.

exemple : $M(t) = (x(t), y(t)) = (4\cos t, \sin t)$

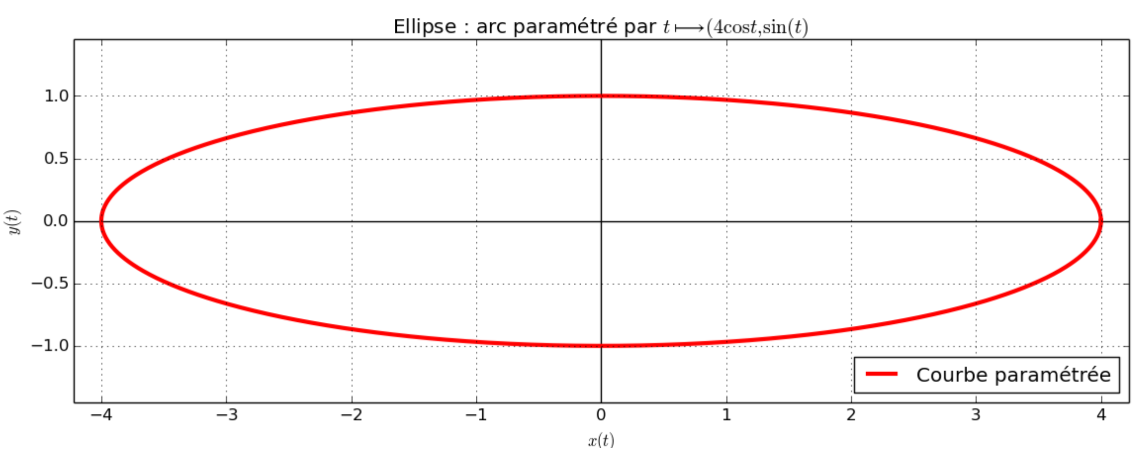
1. $\Delta = \mathbb{R}$. x et y y sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Par 2π-périodicité de x et y, il suffit d'étudier la courbe sur $\Delta_2 = [-\pi, \pi]$. Les points obtenus sont parcourus une infinité de fois ($M(t + 2k\pi) = M(t), \forall k \in \mathbb{Z}$)
3. Pour tout $t \in [0, \pi]$, $(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(t))$. On peut donc étudier la courbe sur $\Delta_3 = [0, \pi]$ et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe (Ox).

   Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, $\pi - t \in [\pi/2, \pi]$, et $(x(\pi - t), y(\pi - t)) = (-x(t), y(t))$. On peut donc étudier la courbe sur $\Delta_4 = [0, \pi/2]$ et déduire la courbe par une symétrie par rapport à l'axe (Oy).
4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(x'(t), y'(t)) = (-4\sin t, \cos t) \neq (0, 0)$

   Donc tous les points sont réguliers.
5.

t	0		$\frac{\pi}{2}$
$x'(t)$	0	$+$	-4
$x(t)$	4	$\searrow$	0
$y(t)$	0	$\nearrow$	1
$y'(t)$	1	$+$	0

6. On remarque que pour $t = 0$ la tangente est verticale, pour $t = \pi/2$ la tangente est horizontale



III. Compléments sur la dérivation

III.1 Dérivation et linéarité

Proposition 5.

Soient E euclidien, $f : I \to E$ dérivable, et $L \in \mathcal{L}(E)$.
Alors $L \circ f : I \to E$ est dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I,\ (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

démonstration : $\frac{1}{h}(L \circ f(t+h) - L \circ f(t)) \underset{lin}{=} L\left(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t))\right) \xrightarrow[h\to 0]{} L(f'(t))$

car toute application linéaire est continue et car $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(t)$ □

III.2 Dérivation et linéarité

Proposition 6.

Soient E, F euclidien, $f, g : I \to E$ dérivable, et $B : E \times E \to F$ une application bilinéaire.
Alors $B(f, g) : I \to F,\ t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I, et :

$$\forall t \in I,\ (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

démonstration : $\frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) = \frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t+h))) + \frac{1}{h}(B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) \underset{bilin}{=} B(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)), g(t+h)) + B(f(t), \frac{1}{h}(g(t+h) - g(t))) \xrightarrow[h\to 0]{} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

car toute application bilinéaire est continue et car $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow[h\to 0]{} f'(t)$ et $\frac{1}{h}(g(t+h) - g(t)) \xrightarrow[h\to 0]{} g'(t)$. □

exemple 5 (Produit scalaire)**.**
Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto < f(t)|g(t) >$ est dérivable de dérivée $t \mapsto < f'(t)|g(t) > + < f(t)|g'(t) >= 2 < f'(t)|g(t) >$

exemple 6 (Trajectoire orthoradiale)**.**
Si $f : I \to \mathbb{R}^2$ est tel que : $\forall t \in I,\ f(t) \perp f'(t)$, alors $t \mapsto \|f(t)\|^2 =< f(t)|f(t) >$ est constante : le mouvement est circulaire !

exemple 7. Si $f, g : I \to \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$

III.3 Dérivation et composée

Proposition 7.

Soient I, J deux intervalles réels, E euclidien, $\overrightarrow{f} : I \to E$ dérivable et $\varphi : J \to I$ dérivable.
Alors $\overrightarrow{f} \circ \varphi : J \to E,\ t \mapsto \overrightarrow{f}(\varphi(t))$ est dérivable sur J, et :

$$\forall s \in J,\ (\overrightarrow{f}(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s)\ \overrightarrow{f}'(\varphi(s))$$

démonstration :
$\frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f} \circ \varphi(t+h) - \overrightarrow{f} \circ \varphi(t)\right) \underset{DL1}{=} \frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f}(\varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)) - \overrightarrow{f}(\varphi(t)\right)$

$\underset{DL1}{=} \frac{1}{h}\left(\overrightarrow{f}(\varphi(t)) + (h\varphi'(t) + o(h))\overrightarrow{f}'(\varphi(t)) + \overrightarrow{o}(h\varphi'(t) + o(h)) - \overrightarrow{f}(\varphi(t)\right)$

$= \frac{1}{h}\left((h\varphi'(t) + o(h))\overrightarrow{f}'(\varphi(t)) + \overrightarrow{o}(h\varphi'(t) + o(h))\right)$

$= \varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t)) + o(1)\overrightarrow{f}'(\varphi(t)) + \overrightarrow{o}(\varphi'(t) + o(1)) = \varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t)) + \overrightarrow{o}(1) \xrightarrow[h\to 0]{} \varphi'(t)\overrightarrow{f}'(\varphi(t))$ □

Remarque 6. En physique on peut changer d'échelle de temps.

IV. Tangente à une courbe plane

IV.1 Point régulier

Définition 10.

Etant donnée $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1$, on appelle **point régulier** tout point $M=(x_0,y_0)$ tel que $f(x_0,y_0)=0$ et tel que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right) \neq (0,0)$.
On dit que M est un **point critique** sinon.

Remarque 7. En d'autre termes, M est régulier si et seulement si $f(M)=0$ et $\nabla f(M) \neq \overrightarrow{0}$.

Remarque 8. On admet que toute courbe du plan suffisamment « lisse »peut être définie par une telle équation.

Définition 11 (Tangente à une courbe paramétrée)**.**

Si $\Gamma = \{(\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t)); t \in I\}$ est une courbe de l'espace paramétrée par γ de classe $\mathcal{C}^1$, la tangente à la courbe en un point $M_0=\gamma(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$ est la droite passant par M_0 et dirigée par le vecteur $\gamma'(t_0)$.

IV.2 Tangente à une courbe plane donnée par son équation cartésienne

Définition 12.

Etant donnée $\mathcal{C}$ une courbe d'équation cartésienne $f(x,y)=0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, on appelle **point régulier** tout point $M=(x_0,y_0)$ tel que $f(x_0,y_0)=0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M)\right) \neq (0,0).$$

On appelle **point singulier** tout point $M=(x_0,y_0)$ tel que $f(x_0,y_0)=0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M)\right) = (0,0).$$

Proposition 8.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane d'équation cartésienne $g(x,y)=0$, pour $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ et M un point de $\mathcal{C}$, alors **la tangente** $\mathcal{T}_M$ à la courbe $\mathcal{C}$ en M est la droite passant par M et **orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{Grad}\ g_M}$.**

démonstration :
on paramètre $\mathcal{C}$ par $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$.
Pour tout $t \in I$, on a $g(\gamma(t))=0$, donc d'après la règle de la chaîne,
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g(\gamma(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$
ou encore :

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}\ g_{\gamma(t)}} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$. □

Remarque 9. Une équation cartésienne de la tangente en M est donc $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad }g_{\gamma(t)}} = 0$, soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

Proposition 9.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$, la tangente à la courbe au point régulier $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation cartésienne :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

démonstration :
on paramètre $\mathcal{C}$ par $\gamma : t \longmapsto (x(t), y(t))$.
Pour tout $t \in I$, on a $g(\gamma(t)) = 0$, donc d'après la règle de la chaîne,
$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(g(\gamma(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t))y'(t)$
ou encore :

$$\overrightarrow{\text{Grad }g_{\gamma(t)}} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} = 0$$

La tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$. □
Une équation cartésienne de la tangente en M est donc $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{\text{Grad }g_{\gamma(t)}} = 0$, soit :

$$(x - x_M) \times \frac{\partial g}{\partial x}(M) + (y - y_M) \times \frac{\partial g}{\partial y}(M) = 0$$

□
interprétation : meilleure approximation locale donnée par le DL1 :
$f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$
Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond à la tangente.

exemple 8. $x^2 + y^2 = 5$: la tangente au point $(1, 2)$ a pour équation $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 = 0$.

V. Plan tangent à une surface

V.1 Introduction : paramétrisation d'une surface

Une surface peut être donnée par une équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$.

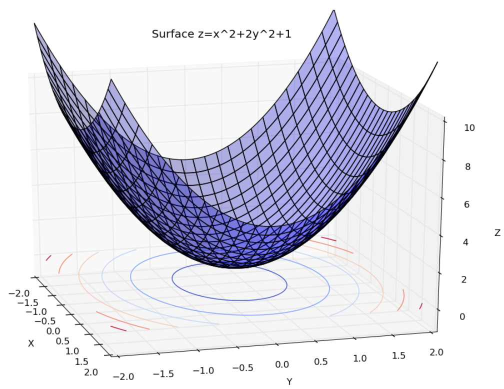
Par exemple, la sphère de centre O et de rayon 1 est paramétrée par $(\varphi, \theta) \longmapsto (\cos(\theta)\cos(\varphi), \sin(\theta)\cos(\varphi), \sin(\varphi))$
Une équation cartésienne est $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

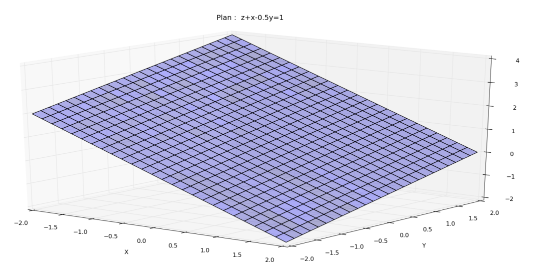
On parle également de surface paramétrée pour un ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétré par

$$(u, v) \longmapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v)).$$

On parle se surface paramétrée en cartésiennes pour un ensemble de points de l'espace $\mathbb{R}^3$ paramétré par $(x, y) \longmapsto (x, y, g(x, y))$, où $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Par exemple, le paraboloïde de révolution de sommet 0 et d'axe (Oz) est paramétrée par $(x, y) \longmapsto (x, y, x^2 + y^2)$.
Une équation cartésienne de cette ensemble est $z = g(x, y)$.





V.2 Point régulier

Définition 13.

Etant donnée $\mathcal{S}$ une surface d'équation cartésienne $f(x, y, z) = 0$, avec f de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, on appelle **point régulier** tout point $M = (x_0, y_0, z_0)$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = 0$ et tel que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(M), \frac{\partial f}{\partial y}(M), \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right) \neq (0, 0, 0).$$

Remarque 10. En d'autre termes, M est régulier si et seulement si $f(M) = 0$ et $\nabla f(M) \neq \overrightarrow{0}$.

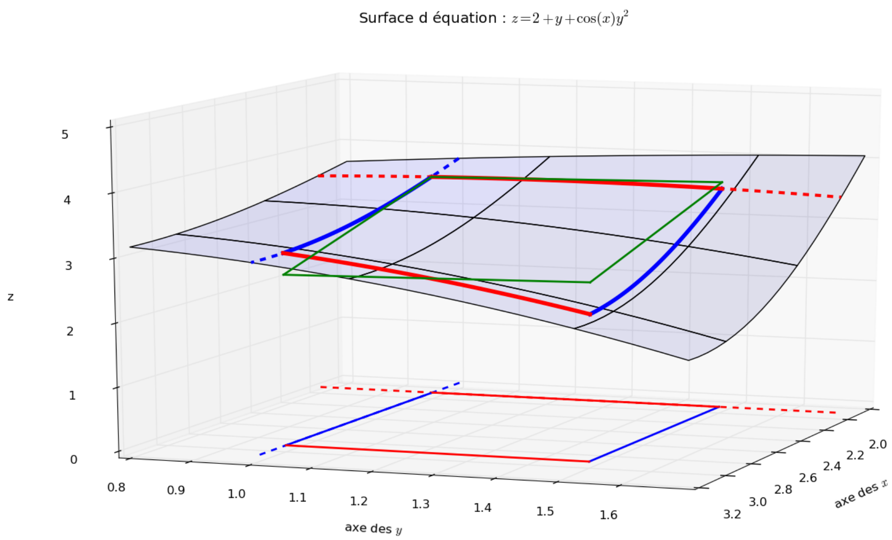
Remarque 11. On admet que toute surface de l'espace suffisamment « lisse »peut être définie par une telle équation.

V.3 Plan tangent

Définition 14 (Plan tangent à une surface)**.**

Si $\mathcal{S}$ est une surface de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan contenant M_0 et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{Grad}\, f}_{M_0}$.

Remarque 12. Si $\mathcal{S}$ est une surface de l'espace d'équation $f(x, y, z) = 0$, le plan tangent à la surface en $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan qui approche le mieux la surface au voisinage de M_0.



Remarque 13. Par application de la règle de la chaîne à $0 = f(\varphi(u,v))$, on obtient que

$\overrightarrow{\text{Grad } f}_{M_0} \perp \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}$ et $\overrightarrow{\text{Grad } f}_{M_0} \perp \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v}$: lorsque la famille $(\dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u}, \dfrac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v})$ est libre, elle dirige le plan tangent.

Proposition 10.

Si $\mathcal{S}$ est une surface d'équation cartésienne $f(x,y,z) = 0$, le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0$$

démonstration : meilleure approximation locale donnée par le DL1 :

$0 = 0 - 0 = f(x,y,z) - f(x_0, y_0, z_0) \approx (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(M) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(M) + (z - z_0)\dfrac{\partial f}{\partial z}(M)$

Si ce terme d'ordre 1 est nul, on a affaire à une variation "négligeable", i.e. d'ordre supérieur ou égal à 2 ; cela correspond au plan tangent.

exemple 9. $x^2 + y^2 + z^2 = 5$: le plan tangent en $(1, 2, 0)$ a pour équation $(x - 1) \times 2 + (y - 2) \times 4 + (z - 0) \times 0 = 0$.

Proposition 11.

Cas particulier : $z = f(x,y)$.
le plan tangent à la surface au point régulier $M_0(x_0, y_0, z_0)$ est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

VI. Etude locale d'une courbe plane : HP

VI.1 Développement limité vectoriel

Théorème 12 (Formule de Taylor avec reste intégral).

Soit $\overrightarrow{\gamma} : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tous t et t_0 dans I, on a :

$$\overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\overrightarrow{\gamma^{(k)}}(t_0) \quad + \int_{t_0}^{t} \frac{(t-u)^n}{n!}\overrightarrow{\gamma^{(n+1)}}(u)\,\mathrm{d}u$$

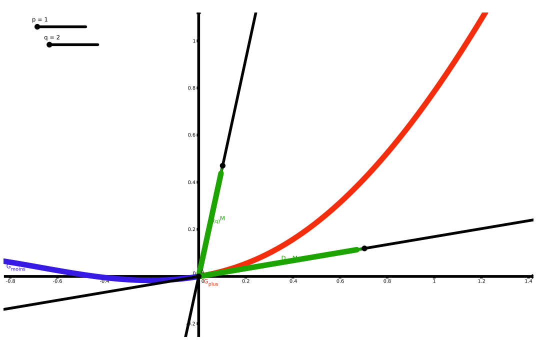
Théorème 13 (Formule de Taylor-Young).

Soit $\overrightarrow{\gamma} : I \to E$ est un arc régulier de classe $\mathcal{C}^{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$. Pour tous t et t_0 dans I, on a :

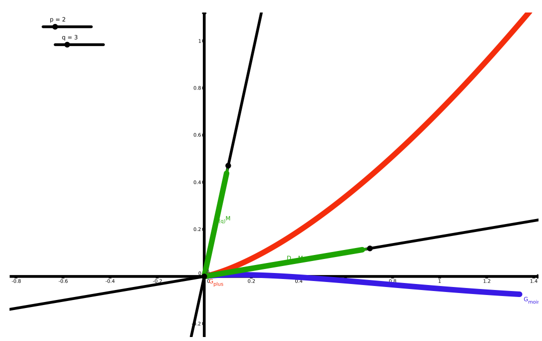
$$\overrightarrow{\gamma}(t) = \overrightarrow{\gamma}(t_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{(t-t_0)^k}{k!}\overrightarrow{\gamma^{(k)}}(t_0) \quad + \overrightarrow{r}(t) \text{ , avec } \overrightarrow{r}(t) \underset{t\to t_0}{=} \overrightarrow{o}((t-t_0)^n)$$

Soient $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par $\overrightarrow{OM} : I \to \mathbb{R}^n$, et $t_0 \in I$ et $(p,q) \in \mathbb{N}$ le couple d'entiers tel que :
p est le plus petit entier $k \geq 1$ tel que $\overrightarrow{OM}^{(k)}(t_0)$ est non nul. On note $\boxed{\overrightarrow{T} = \overrightarrow{OM}^{(p)}(t_0)}$.
q est le plus petit entier $\ell \geq p+1$ tel que pour $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{OM}^{(q)}(t_0)$, la famille $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{R})$ est libre. On a donc $1 \leq p < p+1 \leq q$

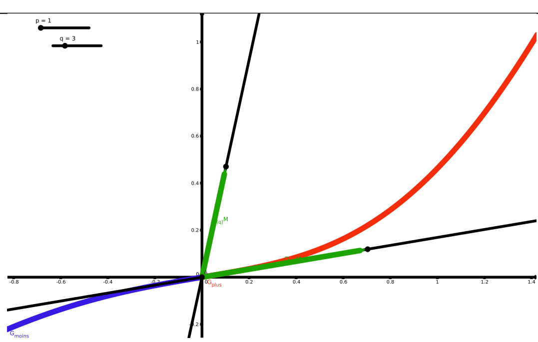
$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) \underset{t\to t_0}{=} \overrightarrow{OM}(t_0) + \frac{(t-t_0)^p}{p!}\overrightarrow{T} + \overrightarrow{o}((t-t_0)^p)\overrightarrow{T} + \frac{(t-t_0)^q}{q!}\overrightarrow{R} + \overrightarrow{o}((t-t_0)^q)}$$



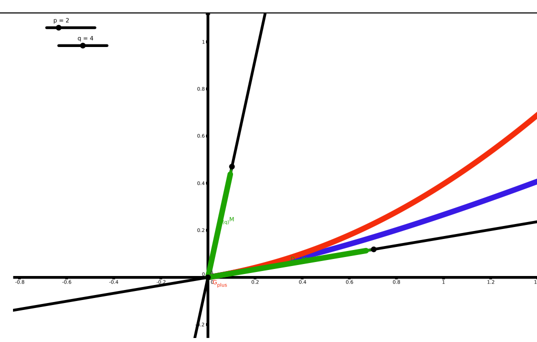
Cas p impair, q pair :
point ordianire ($p = 1$, $q = 2$: point régulier)



Cas p pair, q impair :
point de rebroussement de 1ère espèce



Cas p impair, q impair :
point d'inflexion



Cas p pair, q pair :
point de rebroussement de 2ème espèce

VI.2 Branches infinies d'une courbe planes

Soient I un intervalle réel, Γ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ par $F : I \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto (x(t), y(t))$, et t_0 un point de I ou une borne (éventuellement infinie) de I.

Proposition 14 (branches infinies)**.**

C'est le cas lorsque la limite suivante existe : $lim_{t\to t_0} \|F(t)\| = +\infty$

1. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \ell$ et $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = +\infty$, alors

   Γ admet pour $\boxed{\text{asymptote horizontale au voisinage de } t_0 \text{ la droite d'équation } y = \ell}$.
2. S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \ell$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = +\infty$, alors

   Γ admet pour $\boxed{\text{asymptote verticale au voisinage de } t_0 \text{ la droite d'équation } x = \ell}$.
3. S'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que les limites suivantes existent :

   $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \alpha$ et $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - \alpha x(t) = \beta$, alors

   Γ admet pour $\boxed{\text{asymptote au voisinage de } t_0 \text{ la droite d'équation } y = \alpha x + \beta}$.
4. Si les limites suivantes $\lim\limits_{t\to t_0} |x(t)| = \lim\limits_{t\to t_0} |y(t)| = +\infty$ existent et si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = +\infty$, alors

   Γ admet pour $\boxed{\text{une branche parabolique au voisinage de } t_0 \text{ dans la direction } (0y)}$.
5. Si les limites suivantes $\lim\limits_{t\to t_0} |x(t)| = \lim\limits_{t\to t_0} |y(t)| = +\infty$ existent et si $\lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \alpha \in \mathbb{R}$ et

   $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) - \alpha x(t)$ est infinie, alors

   Γ admet pour $\boxed{\text{une branche parabolique au voisinage de } t_0 \text{ dans la direction la droite d'équation } y = \alpha x}$.

Fonctions vectorielles, arcs paramétrés

L'objectif de ce chapitre est double :

- *généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique, en vue notamment de préparer le chapitre sur les équations différentielles ;*
- *formaliser des notions géométriques (arc paramétré, tangente) et cinématiques (vitesse, accélération) rencontrées dans d'autres disciplines scientifiques.*

Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Dérivabilité et opérations sur les fonctions dérivables	
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Taux d'accroissement et développement limité d'ordre un. Interprétations géométrique et cinématique. $\leftrightarrows$ PC : vecteur vitesse.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L \circ f$, $B(f, g)$, $f \circ \varphi$ où f et g sont dérivables et à valeurs vectorielles, L est linéaire, B est bilinéaire, φ est dérivable et à valeurs réelles.	Application au produit scalaire et au déterminant dans une base de $\mathbb{R}^2$ de deux fonctions vectorielles.
b) Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$	
Fonction de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle. Opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.	$\leftrightarrows$ PC : vecteur accélération. Brève extension des résultats du paragraphe précédent.
c) Arcs paramétrés	
Arc paramétré de classe $\mathcal{C}^k$, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Point régulier, tangente en un point régulier. Construction d'arcs plans.	L'étude des points stationnaires, des asymptotes et des arcs définis en coordonnées polaires est hors programme. $\leftrightarrows$ I : visualisation à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.