Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Suites de variables aléatoires

I.1 Introduction : répétition d'évènements indépendants

Exemple :
on répète une expérience incertaine sur une grande population de taille N_0, et on aimerait comprendre le phénomène « en moyenne. »

• **Pour le probabiliste**, il s'agit de déterminer un modèle aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, représentant les différents résultats individuels.
Le comportement moyen d'un groupe de N variables est caractérisé par la variable aléatoire moyenne

$$S_N = \frac{X_1 + \dots X_N}{N}$$

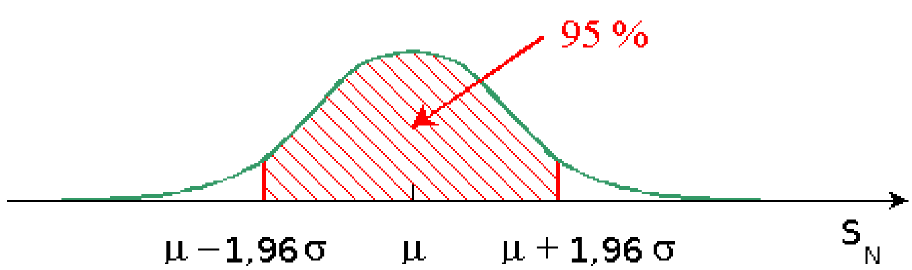
Il s'agit de comprendre les lois de S_N pour $N \in [\![1, N_0]\!]$.

• **Pour le statisticien**, on dispose d'un échantillon $(x_1, \dots, x_N)$ correspondant à un sondage d'une partie de la population, et on aimerait tester son comportement moyen, à l'aide d'un modèle probabiliste, pour prédire l'état du système $(x_1, \dots, x_{N_0})$
Pour cela, on s'appuie sur la moyenne observée $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \dots x_N}{N}$ sur l'échantillon sondé.

Réponse du programme de lycée :
Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes de même loi usuelle,
admettant une « espérance »$\mu \in \mathbb{R}$ et une « variance » $\sigma^2 > 0$, alors lorsque $N \to +\infty$
$S_N = \dfrac{X_1 + \dots X_N}{N}$ se comporte comme une variable gaussienne de densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
On a

$$\mathbf{P}\left(\left\{|S_N - \mu| \leq 1,96\frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right\}\right) \leq 0,95$$

ce qui signifie qu'avec une probabilité supérieur à 95%, $\left|\dfrac{X_1 + \dots X_N}{N} - \mu\right| \leq 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$



Interprétation : la moyenne empirique observée sur l'échantillon $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \dots x_N}{N}$ doit être souvent proche de l'espérance μ, et dans l'intervalle de cofiance $I_{0,95} = [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ dans 95% des observations.

I.2 Indépendance d'une famille de variables

Définition 1 (Variables mutuellement indépendantes).

Des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ \mathbf{P}((X_i)_{1\leq i\leq n} = (x_i)_{1\leq i\leq n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

Définition 2 (Suite de variables aléatoires indépendantes).

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
- On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si $\forall i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.
- On dit que les $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **mutuellement indépendantes** si pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i\in I}$ sont mutuellement indépendantes.

exemple 1. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

On note $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0,1[$, et $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $b(p)$.

Alors $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(N,p)$.

En effet, S_N est à valeurs dans $[\![0,N]\!]$, et pour tout $k \in [\![0,N]\!]$ on a :

$$\mathbf{P}(\{S_N = k\}) = \mathbf{P}(\{\sum_{i=1}^{N} X_i = k\}) = \mathbf{P}(\bigcup_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \{(X_1,\dots,X_N) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\}) \underset{evnmts\ incompatibles}{=}$$
$$\sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} \mathbf{P}(\{(X_1,\dots,X_N) = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)\}) \underset{indep.}{=} \sum_{(\varepsilon_i)\in\{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N}\varepsilon_i = k} p^k(1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

exemple 2. Attention : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse !

Contre-exemple : X et Y indépendantes de loi $b(1/2)$, $Z = (2X-1)(2Y-1)$.

$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) + \mathbf{P}(X=0,Y=0) = 1/2$ $\mathbf{P}(Z=-1) = \mathbf{P}(X=0,Y=1) + \mathbf{P}(X=1,Y=0) = 1/2$

$\mathbf{P}(Z=1,X=0) = \mathbf{P}(X=0,Y=0) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)$, $\mathbf{P}(Z=1,X=1) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=1)$ d'où l'indépendance 2 à 2.

En revanche, $\mathbf{P}(Z=1,X=0,Y=1) = 0 \neq \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$

II. Résultats avancés

II.1 Positivité, croissance de l'espérance

Proposition 1.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une espérance (indépendantes ou non), alors $\mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

démonstration : Par récurrence sur $n \geq 2$. □

Proposition 2 (Positivité, croissance de l'espérance).

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

- [Positivité] Si X est à valeurs positives et admet une espérance, alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$
- [Croissance] Si X et Y admettent des espérances et si : $X(\omega) \leq Y(\omega),\ \forall \omega \in \Omega$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$

démonstration : Pour la positivité de l'espérance on remarque que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ est la somme d'une série convergente positive.
Pour la croissance de l'espérance, il suffit d'appliquer le poin précédent à $Y - X \geq 0$ et par linéarité $\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(X) \geq 0$.

II.2 Première inégalité de Markov

Proposition 3 (1ère Inégalité de Markov).

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance finie.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{t}}$

démonstration :

On note Y la v.a.r. définie pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) = \begin{cases} t & \text{si } |X(\omega)| \geq t \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| < t \end{cases}$

Ainsi Y est égale à t si $X \geq t$ et à 0 sinon, et se note $Y(\cdot) = t\ \mathbf{1}_{|X| \geq t}(\cdot)$.

On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\boxed{|X(\omega)| \geq Y(\omega)}$

(car si ω est tel que $|X(\omega)| \geq t$, alors $|X(\omega)| \geq = Y(\omega)$ et si ω est tel que $|X(\omega)| < t$, alors $|X(\omega)| \geq 0 = Y(\omega)$)

Y est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, donc admet une espérance.

$|X|$ admet une espérance, car la série $\sum |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge, puisque X admet une espérance.

D'après la croissance de l'espérance, on en déduit que :

$\boxed{\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(Y)}$

or $\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbf{P}(\{Y = 0\}) + t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{|X| \geq t\})$

d'où $\mathbb{E}(|X|) \geq t\mathbf{P}(|X| \geq t)$, puis on divise par $t > 0$. □

II.3 Variance d'une somme finie

Proposition 4.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une variance, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

démonstration : Calcul direct, par récurrence sur n. $\square$

Proposition 5.

Si $X_1, \dots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une variance et deux à deux indépendantes, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$$

démonstration : le second terme est nul par espérance d'un produit de va indépendantes. $\square$

exemple 3. Pour $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$ de loi $\mathcal{B}(N, p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(X_k) = Np(1-p)$$

exemple 4. Pour S_N de loi $\mathcal{B}(N, p)$, $\mathbb{V}\left(\dfrac{1}{N} S_N\right) = \dfrac{1}{N^2} \mathbb{V}(S_N) = \dfrac{p(1-p)}{N}$

II.4 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

En corollaire de l'inégalité de Markov, on en déduit une seconde inégalité :

Corollaire 6 (2ème inégalité de Markov)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{t^2}$

démonstration : Markov appliqué à la v.a.r. X^2, en remarquant que $X^2 \geq t^2 \iff |X| \geq t$. $\square$

Proposition 7 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**.**

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$

démonstration : 2ème inégalité de Markov appliqué à $(X - \mathbb{E}(X))$ $\square$

Remarque 1. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la variation par rapport à la moyenne.

II.5 Application : Loi des grands nombres

Théorème 8 (Loi faible des grands nombres).

si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

démonstration : Conséquence de Bienaymé-Tchebychev pour $X = \frac{S_n}{n}$, variable d'espérance m et de variance $\frac{\sigma^2}{n}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leq \frac{\frac{1}{n}\times\sigma^2}{\varepsilon^2}}$ $\square$

Remarque 2. Intervalle de confiance à 95% pour $n = 1000$ tirages $0,95 = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, donc $\varepsilon = \sqrt{0.95} * \sigma * n$ c'est peu précis.

En pratique celui obtenu par le théorème de la limite centrale est meilleur.

Remarque 3. (HP) Méthode de Monte-Carlo : pour approcher $\int_0^1 f$, on calcule $\frac{\sum_{i=1}^{N} f(X_i)}{N}$ pour des X_i de loi uniforme sur $[0, 1]$...

III. Fonction de répartition

Définition 3 (Fonction de répartition).

On appelle **fonction de répartition** de la variable aléatoire réelle discrète X la fonction :

$$F_X : t \longmapsto \mathbf{P}(\{X \leq t\})$$

Proposition 9.

F_X est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim_{t\to+\infty} F_X(t) = 1$, $\lim_{t\to-\infty} F_X(t) = 0$,

démonstration :

Dans le cas où X est à valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{(x_n)_n\}$:, avec $(|x_k|)$ triée par par ordre croissant de modules :

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe n_0 tel que $\mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} < \varepsilon$, car la série $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est positive convergente, de somme 1

Mais alors pour $t < -|x_{n_0}|$, on a $0 \leq \mathbf{P}(X \leq t) \leq \mathbf{P}(X \leq -|x_{n_0}|) \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{t\to-\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$, $\lim_{t\to-\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 0$.

De même

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe n_0 tel que $\mathbf{P}(X > |x_{n_0}|) = \sum_{k=n_0}^{+\infty} < \varepsilon$, car la série $\sum_k \mathbf{P}(X = x_k)$ est positive convergente, de somme 1

Mais alors pour $t \geq |x_{n_0}|$, on a $0 \leq \mathbf{P}(X > t) \leq \mathbf{P}(X \leq n_0) \leq \varepsilon$.

Donc $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}(X > t) = 0$ et par passage à l'évènement contraire, $\lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}(X \leq t) = 1 - 0 = 1$. $\square$

Remarques :

Croissance, limites en $-\infty$ et en $+\infty$.$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$.

IV. Retour sur les lois de Poisson

IV.1 Rappels

Définition 4.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Proposition 10.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \lambda$
$\mathbb{V}[X] = \lambda$
$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

IV.2 Additivité

Proposition 11 (additivité de poissons indépendantes).

Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

démonstration : $\mathbf{P}(X + Y = k)$ se découpe et binôme de Newton.

$$\mathbf{P}(X + Y = k) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}((X, Y) = (j, k-j)) = \sum_{j=0}^{k} \mathbf{P}(X = j)\mathbf{P}(Y = k-j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{j!(k-j)!} = \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \binom{k}{j} \frac{\lambda^j \mu^{k-j}}{k!} = \sum_{j=0}^{k} e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^k}{k!}$$

IV.3 Absence de mémoire

Proposition 12 (Caractérisation comme loi sans mémoire)**.**

Une loi de probabilité $\mathbf{P}$ d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est une loi géométrique si et seulement si

$$\forall k, n \in \mathbb{N},\ \mathbf{P}_{\{X>n\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n+k \mid X > n) = \mathbf{P}(X > k).$$

démonstration : • $\mathbf{P}(X > m) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j) = \sum_{j=m+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1}p = p \sum_{j=m+1}^{+\infty} (1-p)^{j-1} = (1-p)^m$

Donc $\mathbf{P}_{\{X>n\}}(X > n+k) = \dfrac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbf{P}(X > k)$.

donc la loi $\mathcal{G}(p)$ est sans mémoire.

• réciproquement

$\mathbf{P}_{\{X>k\}}(X = n+k) = \mathbf{P}_{\{X>k\}}(X > n+k-1) - \mathbf{P}_{\{X>k\}}(X > n+k) = \mathbf{P}(X > n-1) - \mathbf{P}(X > n) = \mathbf{P}(X = n)$

En particulier pour $k = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$\mathbf{P}_{\{X>1\}}(X = n+1) = \mathbf{P}(X = n)$, donc en posant $p = \mathbb{P}[X = 1]$, on a $\mathbf{P}(X = n+1) = (1-p)\mathbf{P}(X = n)$.

donc toute loi sur $\mathbb{N}^*$ et sans mémoire est une loi $\mathcal{G}(p)$. pour $p = \mathbb{P}[X = 1]$ □

IV.4 Approximation binomiale-Poisson

Proposition 13 (Approximation binomiale par Poisson)**.**

Si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$

démonstration :

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{(np)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n}) \ \times (1-p)^{n-k}$$

$$= \frac{(np)^k}{k!} \prod_{i=1}^{k-1} (1 - \frac{i}{n}) \ \times e^{n\ln(1-np/n)} \ \times e^{-k\ln(1-np/n)} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \times 1 \times e^{-\lambda} \times 1 \quad \square$$

exemple 5. Suite à une vaccination contre le paludisme, dans une population à risque, on estime à 2%, compte tenu du délai d'immunisation, la proportion de personnes qui seront pourtant atteintes de la maladie. Quelle est la probabilité de constater, lors d'un contrôle dans un petit village de 100 habitants tous récemment vaccinés, plus d'une personne malade ? (on supposera l'indépendance des éventualités).

Compte tenu des hypothèses, le nombre de malades est ici régi par une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,02$. On a $np = 2$ et les conditions d'approximation ($np(1-p) \leq 10$) par une loi de Poisson sont réalisées, en posant $\lambda = np = 2$. Soit m la probabilité cherchée ; avec les notations ci-dessus, on a :

$\mathbf{P}(X = k) = e^{-2\times 2k}/k!$, donc $1 - m \approx \mathbf{P}(X = 0) + \mathbf{P}(X = 1) = 0,406$, soit : $m \approx 0,6$

L'application (peu pratique) de la loi binomiale aurait fourni $1 - m = (0,98)100 + 2(0,98)99 \approx 0,403$. Soit $m \approx 0,597$. L'approximation est donc ici excellente.

Programme PC :

B - Variables aléatoires discrètes

Les objectifs de cette partie sont les suivants :

- *étendre la notion de variable aléatoire finie à des variables dont l'image est un ensemble dénombrable ;*
- *fournir des outils permettant, sur des exemples simples, l'étude de processus stochastiques à temps discret ;*
- *exposer deux résultats asymptotiques : l'approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson et la loi faible des grands nombres ;*
- *introduire les fonctions génératrices et utiliser les propriétés des séries entières.*

La construction d'espaces probabilisés modélisant une suite d'expériences aléatoires est hors programme, on admet l'existence de tels espaces. Les différents types de convergence probabiliste (presque sûre, en probabilité, en loi, en moyenne) sont hors programme.

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

Contenus	Capacités & commentaires
Couple de variables aléatoires discrètes. Loi conjointe et lois marginales Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sont dites indépendantes si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y).$$	Extension aux variables discrètes des notions étudiées en première année sur les variables finies.
Si X et Y sont indépendantes, alors, pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$, on a $$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$	Démonstration hors programme.
Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes alors, pour toutes fonctions f et g, les variables $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Variables mutuellement indépendantes.	Extension sans démonstration aux variables discrètes des notions et des résultats vus en première année.
Suite de variables aléatoires indépendantes (deux à deux ou mutuellement).	La démonstration de l'existence d'un espace probabilisé portant une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes de lois discrètes donnés est hors programme. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Espérance et variance	
La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n\,;\,n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. $\leftrightarrows$ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\ f(x_n).$$	Démonstration hors programme.
Linéarité de l'espérance.	Démonstration non exigible.
Positivité, croissance de l'espérance.	
Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.	Démonstration hors programme.
Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.	
Si X^2 est d'espérance finie, la variance de X est le réel $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$.	
Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.	
Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, égalité $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\,\mathbb{V}(X)$.	
Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.	Brève extension des résultats obtenus dans le cadre d'un univers fini.
Variance d'une somme finie de variables aléatoires ; cas de variables deux à deux indépendantes.	
Covariance, coefficient de corrélation.	Notations : $\mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\rho(X, Y)$.
Encadrement $-1 \leqslant \rho(X, Y) \leqslant 1$.	Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Contenus	Capacités & Commentaires

c) Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

Série génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$	La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa série génératrice G_X.
Le rayon de convergence est au moins égal à 1.	
La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.	Démonstration non exigible.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.	Démonstration non exigible. Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence.
Série génératrice de la somme de deux variables aléatoires indépendantes.	

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance. Caractérisation comme loi sans mémoire : $$P(X > n+k \mid X > n) = P(X > k).$$	
Loi de Poisson de paramètre λ. Série génératrice, espérance et variance. Somme de deux variables indépendantes suivant une loi de Poisson.	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. $\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.

Contenus	Capacités & Commentaires

e) Résultats asymptotiques

Approximation de la loi binomiale par la loi de Poisson : si, pour tout n, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n)$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} np_n = \lambda$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $$\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k\,!}.$$	Interprétation de la loi de Poisson comme loi des événements rares. ⇆ I : simulation de cette approximation. La notion de convergence en loi est hors programme.
Loi faible des grands nombres : si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\|\frac{1}{n}S_n - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$	Estimation : pour tout $\varepsilon > 0$, $$P\left(\left\|\frac{1}{n}S_n - m\right\| \geqslant \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$ ⇆ I : simulation d'une suite de tirages.