classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

PSI
MATHEMATIQUES

Devoir Libre Obligatoire n°4
CCINP/MINES
à rendre le 5 Novembre 2024

Exercice 1. Pour tous

1. Donner un équivalent de u_n puis en déduire la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$ quand :
   (a) $u_n = \dfrac{1}{\ln n \ln(\mathrm{ch}\,(n))}$.
   (b) $u_n = \mathrm{Arccos}\left(\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{n^2}}\right)$.
   (c) $u_n = n^{-\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}$.
   (d) $u_n = e - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.
2. Après avoir vérifié leur convergence, calculer la somme des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n}\right)$.
   (b) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.
   (c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\ln\left(\cos\frac{a}{2^n}\right)$ où $a\in]0,\frac{\pi}{2}[$. On utilisera que $\cos\theta = \dfrac{\sin(2\theta)}{2\sin(\theta)}$ pour $\theta\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$.
3. Nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}$.

Exercice 2. Pour tous

1. En écrivant , pour tout $x\in]-1,1[$, $\dfrac{1}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x}\dfrac{1}{1-x}$, montrer que :
$$\forall x\in]-1,1[, \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$$
2. Justifier que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{3^n}$ et déterminer sa somme.

Exercice 3. Pour tous
Pour les trois matrices suivantes, on résoudra l'équation $\det(A-\lambda I_3)=0$ d'inconnue λ et pour chaque solution λ, déterminer une base de $\mathrm{Ker}\,(A-\lambda I_3)$.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
2. $A = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 6 \\ -7 & 1 & -6 \\ -10 & -1 & -7 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ -15 & -6 & 11 \\ -14 & -6 & 11 \end{pmatrix}$

Problème I (CCINP 2024)

Équivalent de Stirling

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-1}\ dt$ converge si, et seulement si, $x > 0$.

   Pour tout $x > 0$, on note

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ dt$$

2. Montrer que pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

3. On admet que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ dt$ converge et qu'elle vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$.

4. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on note $\rho_k = \ln k - \displaystyle\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \ln t\ dt$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\ln\Gamma(n) = \int_{\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} \ln t dt + \sum_{k=1}^{n-1} \rho_k$$

   On remarquera que pour $n = 1$, par convention, la somme des ρ_k est nulle.

5. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\rho_k = \int_0^{\frac{1}{2}} (2\ln k - \ln(k+t) - \ln(k-t))dt = \int_0^{\frac{1}{2}} -\ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt$$

6. En déduire que $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{N}^*} \rho_k$ converge.

7. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que, lorsque $n \to +\infty$:

$$\ln\Gamma(n) = \left(n - \frac{1}{2}\right)\ln n - n + c + o(1)$$

   En déduire que lorsque $n \to +\infty$:

$$\Gamma(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^c n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n}$$

8. Pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on admet que $t \mapsto t^{x-1}\left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ est intégrable sur $]0, n]$ et on note.

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\ dt$$

   Montrer que pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\Gamma_n(x) = n^x \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\ du$$

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

10. On admet que : pour tout $x > 0$

$$\Gamma_n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$$

En déduire que pour tout $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

11. Montrer que pour tout $x > 0$, $\dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(n)\ n^x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

En déduire que $e^c = \sqrt{2\pi}$ où c est défini à la question **Q7.**

On pourra faire appel aux résultats des questions **Q1** et **Q2.**

Problème II (Mines 2020) (facultatif)

Dans tout le sujet on considère des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit E un tel espace vectoriel et u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** lorsqu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $u^p = 0$; le plus petit de ces entiers est alors noté $v(u)$ et appelé **nilindice** de u, et l'on notera que $u^k = 0$ pour tout entier $k \geq v(u)$. On rappelle que $u^0 = \mathrm{id}_E$. L'ensemble des endomorphismes nilpotents de E est noté $\mathcal{N}(E)$: on prendra garde qu'il ne s'agit *a priori* pas d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Un sous-espace vectoriel $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent lorsque tous ses éléments sont nilpotents, autrement dit lorsque $\mathcal{V} \subset \mathcal{L}(E)$.

Une matrice triangulaire supérieure est dite **stricte** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont nuls. On note $T_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures strictes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On admet qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$.

Dans un sujet antérieur du concours (PSI Maths II 2016), le résultat suivant a été établi :

Théorème A.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Alors, $\dim(\mathcal{V}) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Le théorème A est considéré comme acquis. L'objectif du présent sujet est de déterminer les sous-espaces vectoriels nilpotents de $\mathcal{L}(E)$ dont la dimension est égale à $\frac{n(n-1)}{2}$. Plus précisément on se propose d'établir le résultat suivant (Gerstenhaber, 1958) :

Théorème B.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n > 0$, et $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$. Il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Les trois parties du sujet sont largement indépendantes les unes des autres. La partie I est constituée de généralités sur les endomorphismes nilpotents. Dans la partie II, on met en évidence un mode de représentation des endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien. Dans la partie III, on établit deux résultats généraux sur les sous-espaces vectoriels nilpotents : une identité sur les traces (lemme **C**), et une condition suffisante pour que les éléments d'un sous-espace nilpotent non nul possèdent un vecteur propre commun (lemme **D**). Dans l'ultime partie IV, les résultats des parties précédentes sont combinés pour établir le théorème **B** par récurrence sur la dimension de l'espace E.

I. Généralités sur les endomorphismes nilpotents

Dans toute cette partie, on fixe un espace vectoriel réel E de dimension $n > 0$. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$. On choisit une matrice carré M représentant l'endomorphisme u.

On admettra que M est semblable à une matrice complexe triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont nuls

1. Démontrer que $\mathrm{tr}\,(u^k) = 0$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. On note $\mathcal{N}_\mathcal{B}$ l'ensemble des endomorphismes de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure stricte.

2. Justifier que $\mathcal{N}_\mathcal{B}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$ et mettre en évidence dans $\mathcal{N}_\mathcal{B}$ un élément nilpotent de nilindice n.
On pourra introduire l'endomorphisme u de E défini par $u(e_i) = e_{i-1}$ pour tout $i \in [[2, n]]$, et $u(e_1) = 0$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On se donne deux vecteurs x et y de E, ainsi que deux entiers $p \geq q \geq 1$ tels que $u^p(x) = u^q(y) = 0$, $u^{p-1}(x) \neq 0$ et $u^{q-1}(y) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est libre, et que si $(u^{p-1}(x), u^{q-1}(y))$ est libre alors $(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x), y, u(y), \dots, u^{q-1}(y))$ est libre.

4. Soit $u \in \mathcal{N}(E)$ de nilindice p. Déduire de la question précédente que $p \leq n$ et que si $p \geq n-1$ et $p \geq 2$ alors $\operatorname{Im} u^{p-1} = \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u^{p-1}$ est de dimension 1.

II. Endomorphismes de rang 1 d'un espace euclidien

On considère ici un espace vectoriel euclidien $(E, (-|-))$. Lorsque a désigne un vecteur de E, on note

$$\varphi_a : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (a|x). \end{cases}$$

5. Calculer la dimension de $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ en fonction de celle de E. Montrer que $a \mapsto \varphi_a$ définit un isomorphisme de E sur $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

Étant donné $a \in E$ et $x \in E$ on notera désormais $a \otimes x$ l'application de E dans lui même définie par :

$$\forall z \in E,\ (a \otimes x)(z) = (a|z).x$$

6. On fixe $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que l'application $a \in E \mapsto a \otimes x$ constitue une bijection de E sur $\{u \in \mathcal{L}(E) \ :\ \operatorname{Im} u \subset \operatorname{Vect}(x)\}$.
7. Soit $a \in E$ et $x \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\operatorname{tr}(a \otimes x) = (a|x)$. *Indication : Pour $a \neq 0$, on pourra compléter $(\frac{a}{|a|})$ en une base orthonormée de E et on rappelle que dans une base orthonormée de E, $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, tout vecteur x de E se décompose de la manière suivante : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$*

III. Deux lemmes

On considère ici un espace euclidien $(E, (-|-))$ de dimension $n > 0$. On rappelle que l'on a démontré à la question 4 que le nilindice d'un élément de $\mathcal{N}(E)$ et toujours inférieur ou égal à n. Soit $\mathcal{V}$ un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(E)$ contenant un élément non nul. On note

$$p := \max_{u \in \mathcal{V}} v(u)$$

appelé nilindice générique de $\mathcal{V}$. On a donc $p \geq 2$.

On introduit le sous-ensemble $\mathcal{V}^*$ formé des vecteurs appartenant à au moins un des ensembles $\operatorname{Im} u^{p-1}$ pour u dans $\mathcal{V}$; on introduit de plus le sous-espace vectoriel engendré

$$\mathcal{K}(\mathcal{V}) := \operatorname{Vect}(\mathcal{V}^*).$$

Enfin, étant donné $x \in E$, on pose

$$\mathcal{V}x := \{v(x) \,|\, v \in \mathcal{V}\}.$$

L'objectif de cette partie est d'établir les deux résultats suivants :
Lemme C. Soit u et v dans $\mathcal{V}$. Alors $\operatorname{tr}(u^k v) = 0$ pour tout entier naturel k.
Lemme D. Soit $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$. Si $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$, alors $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

Dans les questions 8 à 11, on se donne deux éléments arbitraires u et v de $\mathcal{V}$.

8. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une unique famille $(f_0^{(k)}, \ldots, f_k^{(k)})$ d'endomorphismes de E telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ (u + tv)^k = \sum_{i=0}^{k} t f_i^{(k)}.$$

   Montrer en particulier que $f_0^{(k)} = u^k$ et $f_1^{(k)} = \sum_{i=0}^{k-1} u^i v u^{k-1-i}$.
   Pour l'unicité, on pourra utiliser une représentation matricielle.
9. À l'aide de la question précédente, montrer que $\sum_{i=0}^{p-1} u^i v u^{p-1-i} = 0$.
10. Étant donné $k \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\operatorname{tr}(f_1^{(k+1)})$, et en déduire le validité du lemme **C**.
11. Soit $y \in E$. En considérant, pour un $a \in \mathcal{K}(\mathcal{V})^\perp$ quelconque, la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto (a|(u + tv)^{p-1}(y)\,)$, démontrer que $f_1^{(p-1)}(y) \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$. À l'aide d'une relation entre $f_1^{(p-1)}(y)$ et et $v(u^{p-1}(y))$, en déduire que $v(x) \in u(\mathcal{K}(\mathcal{V}))$ pour tout $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
12. Soit $x \in \mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x) + \mathcal{V}x$. On choisit $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \operatorname{Im} u^{p-1}$.
    Étant donné $y \in K(\mathcal{V}))$, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $y_k \in \mathcal{K}(\mathcal{V})$ et $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $y = \lambda_k x + u^k(y_k)$.
    En déduire que $\mathcal{K}(\mathcal{V}) \subset \operatorname{Vect}(x)$ puis que $v(x) = 0$ pour tout $v \in \mathcal{V}$.

IV. Démonstration du théorème B

Dans cette ultime partie, nous démontrons le théorème **B** par récurrence sur l'entier n. Le cas $n = 1$ est immédiat et nous le considérerons comme acquis. On se donne donc un entier naturel $n \geq 2$ et on suppose que pour tout espace vectoriel réel E' de dimension $n-1$ et tout sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}'$ de $\mathcal{L}(E')$ de dimension $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il existe une base de E' dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}'$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

On fixe un espace vectoriel réel E de dimension n , ainsi qu'un sous-espace vectoriel nilpotent $\mathcal{V}$ de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$. On munit E d'un produit scalaire $(-|-)$, ce qui en fait un espace euclidien.

On considère, dans un premier temps, un vecteur arbitraire x de $E \setminus \{0\}$. On pose

$$H := \mathrm{Vect}\,(x)^{\perp}, \quad \mathcal{V}x := \{v(x) \,|\, v \in \mathcal{V}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{W} := \{v \in \mathcal{V} : v(x) = 0\}.$$

On rappelle que, dans un espace euclidien E, $F^{\perp} = \{y \in E / \forall z \in F, < y, z >= 0\}$ et on a la propriété : $E = F \oplus F^{\perp}$. On peut définir alors le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$, qu'on appelle, *projecteur orthogonal sur F*.
On note π la projection orthogonale de E sur H. Pour $u \in \mathcal{W}$, on note $\overline{u}$ l'endomorphisme de H défini par

$$\forall z \in H, \, \overline{u}(z) = \pi(u(z)).$$

On considère enfin les ensembles

$$\overline{\mathcal{V}} := \{\overline{u} \,|\, u \in \mathcal{W}\} \quad \text{et} \quad Z := \{u \in \mathcal{W} : \overline{u} = 0\}.$$

13. Montrer que $\mathcal{V}x, \mathcal{W}, \overline{\mathcal{V}}$ et Z sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E, $\mathcal{V}$, $\mathcal{L}(H)$ et $\mathcal{V}$.
14. Montrer que que
$$\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{V}x) + \dim(Z) + \dim \overline{\mathcal{V}}.$$
15. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel L de E tel que
$$Z = \{a \otimes x \,|\, a \in L\} \quad \text{et} \quad \dim L = \dim Z.$$
et montrer qu'alors $x \in L^{\perp}$.
16. En considérant u et $a \otimes x$ pour $u \in \mathcal{V}$ et $a \in L$, déduire du lemme **C** que $\mathcal{V}x \subset L^{\perp}$, et que plus généralement $u^k(x) \in L^{\perp}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathcal{V}$.
17. Justifier que $\lambda.x \notin \mathcal{V}x$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, et déduire alors des deux questions précédentes que
$$\dim \mathcal{V}x + \dim L \leq n - 1.$$
18. Soit $u \in \mathcal{W}$. Montrer que $(\overline{u})^k(z) = \pi(u^k(z))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $z \in H$. En déduire que $\overline{V}$ est un sous-espace vectoriel nilpotent de $\mathcal{L}(H)$.
19. Déduire des questions précédentes et du théorème **A** que
$$\dim \overline{\mathcal{V}} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim(\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x) + \dim(L) = n.$$
et
$$L^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x.$$
En déduire que $\mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$ contient $v^k(x)$ pour tout $v \in \mathcal{V}$ et tout $k \in \mathbb{N}$.
20. En appliquant, entre autres, l'hypothèse de récurrence et la question 19, montrer que le nilindice générique de $\mathcal{V}$ est supérieur ou égal à $n-1$, et que si en outre $\mathcal{V}x = \{0\}$ alors il existe une base de E dans laquelle tout élément de $\mathcal{V}$ est représenté par une matrice triangulaire supérieure stricte.

Compte-tenu du résultat de la question 20, il ne nous reste plus qu'à établir que l'on peut choisir le vecteur x de telle sorte que $\mathcal{V}x = \{0\}$.

On choisit x dans $\mathcal{V}^* \setminus \{0\}$ (l'ensemble $\mathcal{V}^*$ a été défini dans la partie III). On note p le nilindice gńérique de $\mathcal{V}$, et l'on fixe $u \in \mathcal{V}$ tel que $x \in \mathrm{Im}\, u^{p-1}$. On rappelle que $p \geq n-1$ d'après la question 20.

21. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $v(x) \neq 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$. *On pourra utiliser les résultats des questions 4 et 19.*
22. On suppose qu'il existe $v_0 \in \mathcal{V}$ tel que $v_0(x) \neq 0$. Soit $v \in \mathcal{V}$. En considérant $v + tv_0$ pour t réel, montrer que $\mathrm{Im}\, v^{p-1} \subset \mathrm{Vect}\,(x) \oplus \mathcal{V}x$.
On pourra s'inspirer de la méthode de la question 11.
23. Conclure.