1. Quelles sont les racines complexes du polynôme $P(t) = t^4 + 1$? En déduire une factorisation de ce polynôme en deux facteurs réels du second degré.
2. On admet la décomposition en éléments simples suivante, conséquence de la question précédente.

$$\forall u \geq 0,\ \frac{2}{1+u^4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}+u}{u^2+u\sqrt{2}+1} - \frac{-\sqrt{2}+u}{u^2-u\sqrt{2}+1}\right)$$

   Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ existe.
3. Pour $Y \geq 0$ fixé, à l'aide du changement de variable $t = u^2$, sur tout intervalle de la forme $[0, Y]$, montrer que $\displaystyle\int_0^{Y} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{Y^2} \frac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$
4. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
5. Soit α un réel strictement positif. Pour quel ensemble de valeurs de α l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan t}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ existe-t-elle ?
6. Calculer sa valeur pour $\alpha = \dfrac{3}{2}$, à l'aide d'une intégration par parties.