Informatique et Mathématiques PC

Exercice 1 *Python*

```
1 def u(n):
2     if n==0:
3         return 2
4     else:
5         return (2*u(n-1)**2-1)/(u(n-1)**2+2)
6 
7 print(u(0))
8 print(u(1))
9 print(u(2))
```

1. Qu'affiche le programme ci-dessus ?
2. Pourquoi la complexité est-elle désastreuse ? Préciser le nombre $C(N)$ de sous-appels récursifs effectués lors de l'appel de `u(N)` pour $N \in \mathbb{N}$ fixé.
3. Pourquoi est-il opportun de remplacer la ligne 5 par les lignes :
   ```
   z=u(n-1)
   return (2*z**2-1)/(z**2+2)
   ```
   ?
4. Utiliser un dictionnaire `D` pour calculer efficacement à l'aide d'une nouvelle fonction Python `ubis(n)` dont vous proposerez un code.

Exercice 2 *Suites de fonctions.*

Soit $I =]0,+\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto (-1)^n \mathrm{e}^{-n\sqrt{x}}$.
Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{N} f_n(x)$.

1. Soit $N \in \mathbb{N}$. À l'aide des suites géométriques, montrer que pour tout $x > 0$,
$$S_N(x) = \frac{1 - f_{N+1}(x)}{1 + \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$$
2. En déduire la convergence simple sur I de la suite de fonctions (S_N) vers une fonction limite S que l'on explicitera.
3. Soit $N \in \mathbb{N}$. À l'aide du théorème spécial des séries alternées, montrer que pour tout $x > 0$, on a :
$$|S_N(x) - S(x)| \leq |\mathrm{e}^{-(N+1)\sqrt{x}}|$$
4. Soit $a > 0$. En déduire la convergence uniforme sur $[a+\infty[$ de la suite de fonctions (S_N) vers S.
5. Est-il possible d'appliquer le théorème de convergence uniforme sur $J = [1,+\infty[$ pour démontrer la convergence de la suite réelle $\left(\displaystyle\int_1^{+\infty} S_N(t)\,\mathrm{d}t\right)$ vers $\displaystyle\int_1^{+\infty} S_N(t)\,\mathrm{d}t$?
6. (a) En posant $\varphi : x \longmapsto \dfrac{2}{1+\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}$, justifier que :
$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall x \geq 1, |S_N(x)| \leq \varphi(x)$$
   (b) [Question fausse, à retirer] Justifier que φ est continue, positive et intégrable sur J **(Faux)**).
   (c) Justifier que (S_N) converge simplement sur J vers S.
   (d) [Question fausse, à retirer] *pour tous si le théorème de convergence dominée a été vu, pour les seuls 5/2 sinon :*

   En appliquant le théoème de convergence dominée**(impossible)**, démontrer que S est intégrable sur J et que
$$\lim_{N\to+\infty} \int_J S_N = \int_J S.$$