Problème 1 *Eléments propres*

Soit φ l'application :

$$\varphi \ : \ \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P - P' \end{cases}$$

Soit n un entier naturel non nul. On note $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}-$espace vectoriel des polynômes de degré $\leqslant n$.

1. Démontrer que φ induit sur $\mathbb{R}_n[X]$ un endomorphisme. On note φ_n cet endomorphisme.

   indication : il suffit de montrer que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ à l'aide de la notion de degré.

2. Expliciter la matrice de φ_n sur la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

   indication : on vérifiera que cette matrice est triangulaire supérieure car pour $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathbb{R}_k[X]$ est stable par φ_n ce qui permet d'obtenir des blocs de zéros.

3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ_n.

   indication : on vérifiera que φ ne possède qu'une seule valeur propre, et on explicitera le sous-espace propre associé en remarquant qu'il est de dimension 1 et contient les polynômes constants...

4. $E = \mathbb{R}_n[X]$ est-il égal à $\displaystyle\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(\varphi_n)} \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{id} - \varphi_n)$?

   pour les 5/2 : en déduire que l'endomorphisme φ_n n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.

5. Démontrer que φ_n est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. En déduire qu'il existe une unique famille de polynômes $s_0, s_1, \dots, s_n$ telle que :

   (a) $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \varphi_n(s_i) = \dfrac{X^i}{i!}$,

   (b) $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

7. On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}_n[X]$ et δ l'endomorphisme induit par la dérivation sur le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$. Justifier :

   $$(\mathrm{Id} - \delta) \circ (\mathrm{Id} + \delta + \cdots + \delta^n) = \mathrm{Id}$$

   indication : on remarquera que la composé vaut $\mathrm{Id} - \delta^{n+1}$ et que la dérivatin $n+1$ fois des polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ est l'endomorphisme nul.

8. En déduire l'expression de s_i en fonction de X, pour tout i dans $[\![0, n]\!]$.