Devoir Surveillé $n°6$
PSI
MATHEMATIQUES
Samedi 4 Février 2023
(Durée : 4 heures)

Documents, calculatrice et portables interdits

Niveau CCINP/E3A

Exercice 1

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^n)dt$.

Q1. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'existence de I_n.

Q2. En citant le théorème utilisé, déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. *on pourra utiliser, après l'avoir justifié que* $\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \geq 1, t^n \geq t$

Q3. En le justifiant, effectuer le changement de variable $u = t^n$ dans I_n.

Q4. Déterminer alors la $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.
On donnera le résultat en fonction d'une intégrale J *que l'on ne cherchera pas à calculer.*

Q5. En déduire un équivalent de I_n au voisinage de $+\infty$ en fonction de J.

Q6. On considère la série entière $\sum\limits_{n\geq 1} I_n x^n$.

6.1. Déterminer le rayon de R de cette série entière.

6.2. On pose pour tout x réel et lorsque cela est possible $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} I_n x^n$.
Donner l'ensemble de définition de f.

Exercice 2

On admet l'égalité $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit pour tout entier naturel non nul n, $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On introduit les séries entières :

$$H = \sum_{n\geq 1} h_n x^n, \quad S = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} x^n, \quad T = \sum_{n\geq 1} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On notera encore $H(x)$, $S(x)$ et $T(x)$ leurs sommes respectives :

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n, \quad S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n, \quad T(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n} x^n.$$

On note I l'intervalle (ouvert) de convergence de la série H.

Q1. Soit n un entier naturel non nul. Justifier que $h_{2n} - h_n \geq \dfrac{1}{2}$.

Q2. Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.

Q3. Déterminer le rayon de convergence de la série H. En déduire I. *On pourra remarquer que* $|h_n| \leq n$

Q4. Déterminer les rayons de convergence des séries S et T.

Q5. Quel est le développement en série entière de la fonction $(g : x \mapsto \ln(1-x))$? Préciser son rayon de convergence.

Q6. Justifier que la fonction $(G : x \mapsto \ln(1-x)/(1-x))$ est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$. Etablir une relation entre G et H.

Soit L la primitive de H sur l'intervalle I telle que $L(0) = 0$.

Q7. Montrer que : $\forall x \in]-1,1[,\ L(x) = \dfrac{(g(x))^2}{2}$.

Q8. Justifier que L est développable en série entière et expliciter son développement en série entière. On énoncera précisément le théorème utilisé.

Q9. En déduire que $T - S = L$.

Q10. Soit $y \in]0,1[$.

(a) Justifier que $\int_0^y \dfrac{\ln(1-u)}{u} du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u} du + S(y) = 0$$

On pourra utiliser le développement en série entière de la fonction $(x \mapsto \ln(1-x))$.

(b) Justifier que $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-u)}{u} du$ est une intégrale convergente et démontrer l'égalité :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u} du = -\frac{\pi^2}{6}.$$

(c) Justifier que

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

Q11. Exprimer la valeur de $T(\frac{1}{2})$ en fonction de π. Justifier votre réponse.

Exercice 3

Données et Notations

— Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels .

— Dans tout cet exercice, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonne.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général a_{kl} de la matrice A_n vérifie donc :

— $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leqslant k \leqslant n$,

— $a_{k,k-1} = n-k+2$ si $2 \leqslant k \leqslant n+1$,

— $a_{kl} = 0$ pour tous les couples $(k,l) \in [\![1, n+1]\!]^2$ non couverts par les formules précédentes.

On admet et on pourra utiliser que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k-n$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ et que :

$$\ker(A_n - nI_{n+1}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.

— Étant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux n boules numérotées de 1 à n. On note N_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules initialement contenues dans l'urne U_1.
À chaque instant entier $k \in \mathbb{N}^*$, on choisit un des n numéros de façon équiprobable puis on change d'urne la boule portant ce numéro. Les choix successifs sont supposés indépendants.
Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note N_k la variable aléatoire égale au nombre de boules dans l'urne U_1 après l'échange effectué à l'instant k.
Exemple : supposons $n = 4$ et qu'à l'instant 0, l'urne U_1 contient les boules numérotées 1, 3, 4 et l'urne U_2 la boule 2. On a dans ce cas $N_0 = 3$.

- Si le numéro 3 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 3 de U_1 et on la place dans U_2. On a alors $N_1 = 2$.
- Si le numéro 2 est choisi à l'instant 1, on retire la boule 2 de U_2 et on la place dans U_1. On a alors $N_1 = 4$.

Pour $l \in [\![0,n]\!]$, on note $E_{k,l}$ l'évènement $(N_k = l)$ et $p_{k,l} = \mathbb{P}(E_{k,l})$ sa probabilité.

On note enfin $Z_k = \begin{pmatrix} p_{k,0} \\ p_{k,1} \\ \vdots \\ p_{k,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ le vecteur qui code la loi de la variable aléatoire N_k.

Q1. Donner la matrice A_2 et vérifier ce qui est annoncé au début de l'exercice, à savoir que :
A_2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_2 sont les entiers de la forme $2k-2$ pour $k \in [\![0,2]\!]$ et que :

$$\ker(A_2 - 2I_3) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, on note $p_k = \binom{2}{k}$.

Q2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, Pour $k \in \mathbb{N}$, justifier que la famille $(E_{k,0}, E_{k,1}, \ldots, E_{k,n})$ est un système complet d'événements.

Q3. Si l'urne U_1 contient j boules à l'instant k, combien peut-elle en contenir à l'instant $k+1$?
On traitera séparément les cas $j = 0$ et $j = n$.

Q4. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j, l \in [\![0,n]\!]$, déterminer :

$$\mathbb{P}_{E_{k,l}}(E_{k+1,j}),$$

Q5. Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(E_{k+1,0}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,1}) \text{ et } \mathbb{P}(E_{k+1,n}) = \frac{1}{n}\mathbb{P}(E_{k,n-1})$$

et que :

$$\forall j \in [\![1, n-1]\!],\ \mathbb{P}(E_{k+1,j}) = \frac{n-j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j-1}) + \frac{j+1}{n}\mathbb{P}(E_{k,j+1}).$$

Q6. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$Z_k = \frac{1}{n^k} A_n^k Z_0,$$

On suppose jusqu'à la fin de l'exercice qu'à l'instant 0, on a disposé de façon équiprobable et indépendamment les unes des autres les n boules dans l'une des urnes U_1 ou U_2.

Q7. Déterminer la loi π de N_0.

Q8. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N_k a la même loi que N_0.

Q9. Démontrer que π est l'unique loi de probabilité ayant la propriété suivante : si N_0 suit la loi π, alors toutes les variables N_k suivent la loi π.

FIN