classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux
Cours de Mathématiques
D. Zarouf
C.P.G.E Brizeux
PSI

Différents Formulaires

Pour simplifier les calculs

Table des matières

1 Alphabet Grec dans l'écriture scientifique

Lettre grecque minuscule	Lettre grecque majuscule	Prononciation	Lettre latine équivalente
α	A	alpha	a
β	B	beta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	e
ζ	Z	zêta	z
η	H	êta	h
θ	Θ	théta	q
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi ou ksi	c
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rho	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	u
ϕ	Phi	phi	f
χ	X	chi ou khi	x
ψ	Ψ	psi	y
ω	Ω	omega	w

2 Formulaire Trigonométrique

Formule de Moivre : $\forall n \in I\!N, \forall \theta \in \boldsymbol{R}$,

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Formules d'Euler : $\forall \theta \in \boldsymbol{R}$,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

$$\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Relations trigonométriques diverses :

$$\forall x \in \boldsymbol{R},\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\forall x \neq (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}),\ \tan x = \frac{\sin x}{cos\, x}$$

Formules d'addition : $\forall (a, b) \in \boldsymbol{R}^2$,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b).$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b).$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b).$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}.$$

De ces formules, on en déduit **des formules de linéarisation, de transformation de sommes en produits** :

$$\begin{aligned}
\cos(p) + \cos(q) &= 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\cos(p) - \cos(q) &= -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2}) \\
\sin(p) + \sin(q) &= 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2}) \\
\sin(p) - \sin(q) &= 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})
\end{aligned}$$

qu'il n'est pas utile de connaitre par coeur mais plutôt savoir les retrouver à partir des formules d'addition.

On a aussi ;

$$\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a).$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a.$$

A partir desquelles on obtient, en particulier (utile pour intégrer) :

$$\cos^2(a) = \frac{1 + \cos(2a)}{2}.$$

3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Définition : On appelle :
sinus hyperbolique l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{sh} : & \boldsymbol{R} & \to & \boldsymbol{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{sh}\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

cosinus hyperbolique l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{ch} : & \boldsymbol{R} & \to & \boldsymbol{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{ch}\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

tangente hyperbolique l'application

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{th} : & \boldsymbol{R} & \to & \boldsymbol{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}\, x = \dfrac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \end{array}$$

En utilisant les définitions de ch, sh, th, on obtient aisément les formules suivantes, pour tous x, a, b de $\boldsymbol{R}$:

$\mathrm{ch}^2\, x - \mathrm{sh}^2\, x = 1$ A connaître absolument.

$\mathrm{ch}(a+b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b.$

$\mathrm{ch}(a-b) = \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{sh}\, b.$

$\mathrm{sh}(a+b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b + \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b.$

$\mathrm{sh}(a-b) = \mathrm{sh}\, a\, \mathrm{ch}\, b - \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, b.$

$$\mathrm{th}(a+b) = \frac{\mathrm{th}\, a + \mathrm{th}\, b}{1 + \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}.$$

$$\mathrm{th}(a-b) = \frac{\mathrm{th}\, a - \mathrm{th}\, b}{1 - \mathrm{th}\, a\, \mathrm{th}\, b}.$$

$\mathrm{ch}(2a) = \mathrm{ch}^2\, a + \mathrm{sh}^2\, a = 2\mathrm{ch}^2\, a - 1 = 1 + 2\mathrm{sh}^2\, a.$

$\mathrm{sh}(2a) = 2\, \mathrm{ch}\, a\, \mathrm{sh}\, a.$

$$\mathrm{th}(2a) = \frac{2\, \mathrm{th}\, a}{1 + \mathrm{th}^2\, a}.$$

$$\mathrm{ch}^2 a = \frac{\mathrm{ch}\,(2a) + 1}{2}.$$

4 Dérivées des fonctions usuelles

f	Domaine de Définition	f'	Domaine de Dérivabilité
$x \longmapsto k \in \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$	0	$\boldsymbol{R}$
$x^n, n \in \mathbb{Z}^*$	$\boldsymbol{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{R}^*$ sinon	nx^{n-1}	$\boldsymbol{R}$ si $n \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{R}^*$ sinon
$\sqrt{x}$	$\boldsymbol{R}^+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\boldsymbol{R}_+^*$
$\ln(x)$	$\boldsymbol{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$	$\boldsymbol{R}_+^*$
e^x	$\boldsymbol{R}$	e^x	$\boldsymbol{R}$
$\cos(x)$	$\boldsymbol{R}$	$-\sin(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\sin(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\cos(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\tan(x)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$1+\tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[, k \in \mathbb{Z}$
$\text{Arccos}(x)$	$[-1,1]$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\text{Arcsin}(x)$	$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1,1[$
$\text{Arctan}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\boldsymbol{R}$

f	Domaine de Définition	f'	Domaine de Dérivabilité
$\mathrm{ch}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\mathrm{sh}(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$\mathrm{ch}(x)$	$\boldsymbol{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\boldsymbol{R}$	$1-\mathrm{th}^2(x)=\frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}$	$\boldsymbol{R}$
$x^\alpha, \alpha \in \boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}_*^+$	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\boldsymbol{R}_*^+$

5 Autour des Primitives

5.1 Tableau des primitives usuelles

Dans la première colonne figure la fonction f dont on veut donner les primitives.
Dans la deuxième colonne, se trouve **une** primitive de f.
Dans la troisième colonne, se trouve le domaine de définition des primitives. En particulier, on ne peut intégrer f que sur un intervalle inclus dans ce domaine.

Fonction f, $f(x)$	Primitive F, $F(x)$	Domaine de définition de F
$e^{\alpha x}, \alpha \in \boldsymbol{R}^*$ fixé	$\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}$	$\boldsymbol{R}$
$\operatorname{ch}\omega x\ (\omega \in \boldsymbol{R}^*)$ $\operatorname{sh}\omega x\ (\omega \in \boldsymbol{R}^*)$ $\cos\omega x\ (\omega \in \boldsymbol{R}^*)$ $\sin\omega x\ (\omega \in \boldsymbol{R}^*)$	$\frac{1}{\omega}\operatorname{sh}\omega x$ $\frac{1}{\omega}\operatorname{ch}\omega x$ $\frac{1}{\omega}\sin\omega x$ $-\frac{1}{\omega}\cos\omega x$	$\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{R}$ $\boldsymbol{R}$
$\tan x$ $\operatorname{th} x$	$-\ln\mid\cos x\mid$ $\ln\operatorname{ch} x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ (\pi)$ $\boldsymbol{R}$
$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} = 1 - \operatorname{th}^2 x$ $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\operatorname{th} x$ $\tan x$	$\boldsymbol{R}$ $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ (\pi)$
$x^\alpha, \alpha \in \boldsymbol{R} - \mathbb{Z}$ $x^n, n \in \mathbb{Z} - \{0, -1\}$ $x^n, n \in \mathbb{N}$ $\frac{1}{x}$ $\frac{1}{a\,x+b}, (a,b) \in \boldsymbol{R}^* \times \boldsymbol{R}$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $\ln\ \mid x\mid$ $\frac{1}{a}\ln\ \mid a\,x+b\mid$	$\boldsymbol{R}_+^*$ $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ $\boldsymbol{R}$ $]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$ $]-\infty, -\frac{b}{a}[$ ou $]\frac{b}{a}, +\infty[$
$\frac{1}{a^2+x^2}\ (a \neq 0)$ $\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\ (a > 0)$	$\frac{1}{a}\operatorname{Arctan}\frac{x}{a}$ $\operatorname{Arcsin}\frac{x}{a}$ ou $-\operatorname{Arccos}\frac{x}{a}$	$\boldsymbol{R}$ $]-a, a[$

5.2 Opérations usuelles

Fonction f, $f(x)$	Primitive F, $F(x)$	Commentaires
$a\,f'$, a réel	$a\,f$	
$f' + g'$	$f + g$	
$f'\,f^n$, $n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$	$\dfrac{1}{n+1}\,f^{n+1}$	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$ si $n < 0$
$\dfrac{f'}{f}$	$\ln \mid f \mid$	sur tout intervalle où $f(x) \neq 0$
$f' \times (g \circ f)$	$g \circ f$	

6 Autour des développements limités

6.1 Règles de calculs sur les développements limités

Les propriétés sont énoncées pour des développements limités au voisinage de zéro.

On considère deux fonctions f et g définies au voisinage de zéro admettant chacune un développement limité d'ordre n

$$f(x) = P(x) + o(x^n)$$

$$g(x) = Q(x) + o(x^n)$$

où P et Q sont des polynômes de degré inférieur à n, qu'on appelle *parties régulières* respectivement de f et g.

Rappelons les méthodes pour obtenir les développements limités d'une somme, produit, composée et quotient :

Linéarité :

Pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}$, $\lambda f + g$ admet un développement limité en 0 à l'ordre n et

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda\, P(x) + Q(x) + o(x^n)$$

Produit :

fg admet un développement limité d'ordre n et sa partie régulière s'obtient en formant le produit PQ et en ne retenant que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Composée :

On suppose que $f(0) = 0$.

$g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n et sa partie régulière s'obtient en ne retenant du polunôme $Q \circ P$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Quotient :

On suppose que $f(0) \neq 0$.

Alors $\dfrac{1}{f}$ admet un développement limité d'ordre n et pour l'obtenir, on écrit :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a(1 - u(x))}$$

et on effectue le $DL_n(0)$ de la composée des fonctions $u(x)$ et $\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{1-x}$.

Des exemples :

1) $DL_7(0)$ de $\ln(\cos(x))$:

On écrit le DL de cos :

$$\ln(\cos(x)) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7))$$

On utilise le développement limité de $\ln(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} + o(z^3)$: L'ordre 3 suffit car on l'utilise pour $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$ et on cherche un $DL_7(0)$ par rapport à x.

Alors, finalement

$$\begin{aligned} \ln(\cos(x)) \quad = \quad & -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right) \\ & -\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}\right)^2 \end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 7. Il s'ensuit que :

$$\ln(\cos(x)) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$$

2) $DL_5(0)$ de $\tan(x)$:

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)}
\end{aligned}$$

On utilise maintenant le développement limité de $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + o(z^2)$: L'ordre 2 suffit car on l'utilise pour $z = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^5)$ et on cherche un $DL_5(0)$ par rapport à x.

Alors, finalement

$$\begin{aligned}
\tan(x) &= \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)} \\
&= \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right)^2 + o(x^5)\right)
\end{aligned}$$

On ne retient que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à 5. Il s'ensuit que :

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5)$$

6.2 Tableau des développements limités usuels

Tous les développements limités cités ci-dessous sont au voisinage de 0.

I. Développements limités obtenus par le théorème de Taylor-Young

Ordre	DL(0)
n	$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
2n+1	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
2n+1	$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
2n+2	$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
n	$\forall \alpha \in \boldsymbol{R},\ (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$
n	$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$

6.3 Développements limités obtenus par intégration

Ordre	DL(0)
n	$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$
n	$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) = -x - \frac{x^2}{2} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
2n+2	$\operatorname{Arctan} x = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arcsin} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$
2n+2	$\operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} - \cdots - \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

7 Les développements en séries entières usuels à connaître ou à savoir retrouver

7.1 Variable complexe

$$\forall z \in \mathbb{C}, |z| < 1, \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

7.2 Variable réelle

7.2.1 Obtenu par la série exponentielle

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \boldsymbol{R}, \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

7.2.2 Obtenu par la méthode de l'équation différentielle

$$\forall x \in]-1,1[,\ \forall \alpha \in \boldsymbol{R},\ (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

7.2.3 Obtenu par intégration du développement précédent pour α particulier

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arcsin}\, x = x + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\forall x \in]-1,1[,\ \mathrm{Arccos}\, x = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$