inspiré de CCP2015 - PSI

Notations

- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels et $\mathbb{R}^+$ désigne l'intervalle $[0, +\infty[$.
- Si I est un intervalle réel non réduit à un point, on note $C^1(I)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 définies sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- Soit $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour tout entier naturel non nul, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et n colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.
- Un vecteur de $\mathbb{K}^n$ est noté
$$X = (x_k)_{1\leq k\leq n} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$
- Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée $A = (a_{j,k})_{1\leq j,k\leq n}$ où $a_{j,k}$ est le coefficient de A situé en ligne j et colonne k.
- On dit qu'une application $M\ :\ t \in I \mapsto M(t) = (a_{j,k}(t))_{1\leq j,k\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de classe C^1 sur I si toutes les fonctions $a_{j,k}$ le sont et dans ce cas on note $M'(t)$ la matrice $(a'_{j,k}(t))_{1\leq j,k\leq n}$.

Soit I un intervalle réel non réduit à un point et $A\ :\ I \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une fonction continue. Dans ce problème, on s'intéresse au système différentiel

$$X'(t) = A(t)X(t) \qquad (E)$$

où $X\ :\ I \to \mathbb{C}^n$ est une application de classe C^1.

A l'exception de la question I.2 utilisée tout au long du sujet, les deux parties sont indépendantes

I. Quelques exemples d'étude d'un système différentiel

I.1 Qu'affirme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire quant à la structure de l'ensemble des solutions de (E) ?

I.2 Vecteurs propres communs

On suppose qu'il existe un vecteur non nul $V \in \mathbb{C}^n$ et une fonction continue $\lambda\ :\ I \to \mathbb{C}$ tels que pour tout $t \in I$ on ait
$$A(t)V = \lambda(t)V$$
Montrer que la fonction
$$X\ :\ t \in I \mapsto \alpha(t)V \in \mathbb{C}^n$$
est solution de (E) si et seulement si la fonction α est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre que l'on précisera et pour laquelle on donnera une expression des solutions.

I.3 Un premier exemple

On suppose pour cette question que $n = 2$. Soient a et b deux complexes tels que $a - 1 - b \neq 0$. On suppose que, pour tout $t \in I = \mathbb{R}$, on a
$$A(t) = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$
Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (E).

I.4 Un deuxième exemple

On suppose également pour cette question que $n = 2$. Soient μ une constante complexe et a, b des fonctions continues de I dans $\mathbb{C}$, la fonction b ne s'annulant jamais sur I. On suppose que pour tout réel $t \in I$, on a

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & \mu b(t) \\ b(t) & a(t) + (\mu - 1)b(t) \end{pmatrix}$$

I.5 Traiter le cas particulier où $\mu = 1$.

II. Etude de deux fonctions

II.1 L'intégrale de Gauss

II.1.1 Montrer que l'intégrale de la fonction $f \ : \ t \mapsto e^{-t^2}$ est convergente sur $\mathbb{R}^+$.

II.1.2 Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} \, dt \right)^2, \ G(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(t^2+1)}}{t^2+1} \, dt$$

sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$, puis préciser les dérivées d'ordre 1 de F et de G.

II.1.3 Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ F'(x) + G'(x) = 0$$

et en déduire la valeur de $F + G$.

II.1.4 Montrer que

$$\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0 \ \text{ et } \ \lim_{x \to +\infty} F(x) = \frac{\pi}{4}$$

II.1.5 En déduire que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

II.2 Les fonctions u et v

II.2.1 Montrer que les fonctions

$$u(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \cos(tx)}{\sqrt{x}} \, dx \ \text{ et } \ v(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x} \sin(tx)}{\sqrt{x}} \, dx$$

sont bien définies et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

II.2.2 Montrer que la fonction $w = u + iv$ est solution d'une équation différentielle, puis en déduire que $X(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ est solution d'un système différentiel du premier ordre

$$X'(t) = A(t)X(t) \tag{E_1}$$

où la fonction matricielle $A \ : \ \mathbb{R} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est à déterminer.

II.2.3 Déterminer, pour tout réel t, les valeurs propres complexes et les sous-espaces propres de $A(t)$.

II.2.4 Déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$ du système (E_1). En déduire la solution générale de (E_1).

II.2.5 Calculer $u(0)$ et $v(0)$ et en déduire l'expression réelle de u et de v.