Savoirs-faire du Chapitre 10 : Systèmes Linéaires.

Matrices

— Manipuler le double indiçage, comprendre les notations et le vocabulaire.
— Faire des opérations sur les matrices, en particulier le produit par une colonne.

Exercice n° 1

1. Soit p un entier naturel non nul. On considère la matrice M_p de taille $(3,p)$ telle que :
   - sur la première ligne : les coefficients sont égaux à 1
   - sur la 2è ligne : les coefficients sont égaux à l'indice de leur colonne
   - sur la 3è ligne : les coefficients sont égaux à la somme des coefficients situés au-dessus dans la même colonne

   a) Ecrire M_4.

   b) On décide d'appeler les coefficients de M : $m_{i,j}$. Exprimer $m_{i,j}$ en fonction de i et j.
2. On considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall (i,j) \in [\![1;3]\!] \times [\![1;3]\!],\ a_{i,j} = i^j$. Ecrire A.
3. Effectuer les calculs suivants :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 4 & -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} -4 & 1 & 6 \\ 8 & 0 & -3 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. Soit A une matrice. Existe-t-il une colonne B (indépendante de A) telle que AB soit une colonne égale à la somme de toutes les colonnes d'indice pairs de A ?
5. Soit A une matrice. Existe-t-il une colonne C (indépendante de A) telle que AC soit une colonne dont chaque coefficient est la moyenne des coefficients de la ligne de A correspondante ?
6. Soit A une matrice. Existe-t-il une colonne D (indépendante de A) telle que AD soit une colonne dont chaque coefficient est le maximum des coefficients de la ligne de A correspondante ?

Systèmes linéaires

— Reconnaitre un système linéaire, un système linéaire homogène.
— Associer une matrice, une matrice augmentée, à un système linéaire.
— Appliquer l'algorithme de Gauss pour écheloner puis réduire une matrice/une matrice augmentée/un système.
— Résoudre un système.

Exercice n° 2

1. Les systèmes suivants sont-ils linéaires ?

$$(\mathcal{S}_1) : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - 5y + z & = & 2 \\ x - 4z & = & \pi \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_2) : \left\{ \begin{array}{rcl} 4x - y - 1 & = & 0 \\ 2xy + 3 & = & 0 \\ y & = & 5 \end{array} \right. \qquad (\mathcal{S}_3) : \left\{ \begin{array}{rcl} 5x - y & = & 3 \\ z + x - 9 & = & 0 \\ 2 - y + z & = & 5 \end{array} \right.$$

2. Pour chaque système linéaire de la question 1, donner la matrice et la matrice augmentée.
3. Echelonner puis réduire les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 6 & 0 & -4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 3

On considère le système $(\mathcal{S})$: $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 4y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ 5x & & & + & z & = & 3 \end{array}\right.$.

a) Donner la matrice A du système $(\mathcal{S})$, puis sa matrice $(A|B)$.

b) Trouver une suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui permette de passer de A à une matrice échelonnée et réduite.

c) Appliquer la même suite d'opérations élémentaires à $(A|B)$, ainsi qu'à $(\mathcal{S})$.

d) Résoudre $(\mathcal{S})$.

Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

— Comprendre et manipuler les définitions.
— Dédider si une famille de vecteurs est libre ou liée.
— Dédider si une famille de vecteurs est génératrice ou non.

Exercice n° 4

1. Prouver qu'une famille de vecteurs qui contient le vecteur nul est liée. La réciproque est-elle vraie ?
2. La famille $\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 13 \end{pmatrix}\right)$ est-elle libre ou liée ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?
3. La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}\right)$ est-elle libre ou liée ? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$?