Automatismes en calcul, semaine du 10 mars

8 mars 2025

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Lundi : Interrogation de cours

Jeudi : trouver la dimension d'un EV

Vendredi : développement limité et application

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

Justifier rapidement que $A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ est un SEV de $\mathbb{R}_2[X]$ puis donner sa dimension.

A est non vide car $0 \in A$ et stable par combinaison linéaire, c'est un SEV.

Soit $P = aX^2 + bX + c$. On a :

$$\begin{aligned} P \in \ A &\iff P = XP' \iff aX^2 + bX + c = 2aX^2 + bX \\ &\iff a = c = 0 \end{aligned}$$

On a donc $A = \mathrm{Vect}(X)$ et donc $\dim(A) = 1$.

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$ par continuité ?

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\setminus\{0\}$.

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\backslash\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\setminus\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Peut-on prolonger $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$ par continuité ?

$\frac{1+x}{1-x} > 0 \iff x \in]-1;1[$ et $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = 0 \iff x = 0$.
Le domaine de définition de f est donc $]-1;1[\setminus\{0\}$.

Par opérations, en -1^+ et en 1^-, $f(x) \to 0$.

$$\frac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})} = \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{2x}{2x + o(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 1$$

f se prolonge donc par continuité à $[-1;1]$ en posant $f(-1) = f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.