

Automatismes en calcul, semaine du 13 janvier

13 janvier 2025

Résoudre $(2i - 1)z^2 - 3z - i = 0$.

Résoudre $(2i - 1)z^2 - 3z - i = 0$.

$\Delta = 9 + 4i(2i - 1) = 1 - 4i$. Il faut trouver δ une racine carrée de Δ .

► Avec la forme algébrique : $\delta = a + ib$ (a, b des réels)

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{17} \\ 2ab = -4 \end{cases} \quad \text{donc } a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}} \text{ et}$$

$b = -\frac{2}{a}$ conviennent.

Résoudre $(2i - 1)z^2 - 3z - i = 0$.

$\Delta = 9 + 4i(2i - 1) = 1 - 4i$. Il faut trouver δ une racine carrée de Δ .

- Avec la forme algébrique : $\delta = a + ib$ (a, b des réels)

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{17} \\ 2ab = -4 \end{cases} \text{ donc } a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}} \text{ et}$$

$b = -\frac{2}{a}$ conviennent.

- Avec la forme exponentielle :

$$\Delta = 1 - 4i = \sqrt{17} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} + i \frac{-4}{\sqrt{17}} \right) = \sqrt{17} e^{-i \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$$

Donc $\delta = \sqrt{\sqrt{17}} e^{-\frac{1}{2}i \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$ convient.

Résoudre $(2i - 1)z^2 - 3z - i = 0$.

$\Delta = 9 + 4i(2i - 1) = 1 - 4i$. Il faut trouver δ une racine carrée de Δ .

- Avec la forme algébrique : $\delta = a + ib$ (a, b des réels)

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{17} \\ 2ab = -4 \end{cases} \text{ donc } a = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{17}}{2}} \text{ et}$$

$b = -\frac{2}{a}$ conviennent.

- Avec la forme exponentielle :

$$\Delta = 1 - 4i = \sqrt{17} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} + i \frac{-4}{\sqrt{17}} \right) = \sqrt{17} e^{-i \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$$

Donc $\delta = \sqrt{\sqrt{17}} e^{-\frac{1}{2}i \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}$ convient.

Les solutions sont $\boxed{\frac{3 \pm \delta}{2(2i - 1)}}$.

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln |\cos(x)| ; g(x) = (x^2 + 1)^{\sqrt{2}} ; h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln |\cos(x)| ; g(x) = (x^2 + 1)^{\sqrt{2}} ; h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

► $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln |\cos(x)| ; g(x) = (x^2 + 1)^{\sqrt{2}} ; h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sqrt{2}(x^2 + 1)^{\sqrt{2}-1} 2x$

En précisant les domaines, dériver :

$$f(x) = \ln |\cos(x)| ; g(x) = (x^2 + 1)^{\sqrt{2}} ; h(x) = (\sin(x))^{\cos(x)}$$

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}, f'(x) = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \sqrt{2}(x^2 + 1)^{\sqrt{2}-1} 2x$
- ▶ $h(x) = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))}$ donc h est définie et dérivable sur $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi; (2k+1)\pi[$ et on a, $\forall x \in \Omega$:

$$h'(x) = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \left(-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)} \right)$$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3}} ; g(x) = \frac{\ln(x)}{x} ; h(x) = e^{2x} \cos(3x)$$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3}} ; g(x) = \frac{\ln(x)}{x} ; h(x) = e^{2x} \cos(3x)$$

► $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 3} + K \quad (K \in \mathbb{R})$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3}} ; g(x) = \frac{\ln(x)}{x} ; h(x) = e^{2x} \cos(3x)$$

- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 3} + K \quad (K \in \mathbb{R})$
- ▶ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, G(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + K \quad (K \in \mathbb{R})$

En précisant les intervalles, donner des primitives :

$$f(x) = \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + x + 3}} ; g(x) = \frac{\ln(x)}{x} ; h(x) = e^{2x} \cos(3x)$$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = 2\sqrt{x^2 + x + 3} + K \quad (K \in \mathbb{R})$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, G(x) = \frac{1}{2}(\ln(x))^2 + K \quad (K \in \mathbb{R})$

▶ $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \operatorname{Re} \left(e^{x(2+3i)} \right)$ et donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2+3i} e^{x(2+3i)} + K \right) \quad (K \in \mathbb{C})$$

soit $\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = e^{2x} \left(\frac{2}{13} \cos(3x) + \frac{3}{13} \sin(3x) \right) + \widehat{K}$
 $(\widehat{K} \in \mathbb{R})$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} ; \sum_{k=0}^n k(k-1) ; \sum_{k=0}^n e^{2k+1}$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} ; \sum_{k=0}^n k(k-1) ; \sum_{k=0}^n e^{2k+1}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^n k + \frac{3}{5} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{2}{5} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} ; \sum_{k=0}^n k(k-1) ; \sum_{k=0}^n e^{2k+1}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^n k + \frac{3}{5} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{2}{5} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sum_{k=0}^n k(k-1) &= \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

Calculer les sommes suivantes, en fonction de $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} ; \sum_{k=0}^n k(k-1) ; \sum_{k=0}^n e^{2k+1}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n \frac{2k+3}{5} = \frac{2}{5} \sum_{k=0}^n k + \frac{3}{5} \sum_{k=0}^n 1 = \frac{2}{5} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{3}{5}(n+1)$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \sum_{k=0}^n k(k-1) &= \sum_{k=0}^n k^2 - \sum_{k=0}^n k \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \end{aligned}$$

$$\blacktriangleright \sum_{k=0}^n e^{2k+1} = e \sum_{k=0}^n (e^2)^k = e \frac{1 - e^{2n+2}}{1 - e^2}$$