Automatismes en calcul, semaine du 14 octobre

12 octobre 2024

classes préparatoires scientifiques
Lycée Brizeux

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5\mathrm{i}$ et $z_2 = -2 - 7\mathrm{i}$.

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5\mathrm{i}$ et $z_2 = -2 - 7\mathrm{i}$.

$|z_1| = \sqrt{34}$ et $z_1 = \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}} + \mathrm{i}\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$.
Le point $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}; \frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 4è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $\mathrm{Arcsin}(\frac{-5}{\sqrt{34}})$. Finalement, $z_1 = \sqrt{34}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arcsin}(\frac{-5}{\sqrt{34}})}$

Donner les formes exponentielles de $z_1 = 3 - 5\mathrm{i}$ et $z_2 = -2 - 7\mathrm{i}$.

$|z_1| = \sqrt{34}$ et $z_1 = \sqrt{34}\left(\frac{3}{\sqrt{34}} + \mathrm{i}\frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$.
Le point $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}; \frac{-5}{\sqrt{34}}\right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 4è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $\mathrm{Arcsin}(\frac{-5}{\sqrt{34}})$. Finalement, $z_1 = \sqrt{34}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{Arcsin}(\frac{-5}{\sqrt{34}})}$

$|z_2| = \sqrt{53}$ et $z_2 = \sqrt{53}\left(\frac{-2}{\sqrt{53}} + \mathrm{i}\frac{-7}{\sqrt{53}}\right)$.
Le point $\left(\frac{-2}{\sqrt{53}}; \frac{-7}{\sqrt{53}}\right)$ est un point du cercle trigonométrique situé dans le 3è quadrant et une mesure de l'angle correspondant est $-\mathrm{Arccos}(\frac{-2}{\sqrt{53}})$. Finalement, $z_2 = \sqrt{53}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathrm{Arccos}(\frac{-2}{\sqrt{53}})}$

- Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

- Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

  Les racines de $X^5 - 1$ sont les racines $5-$èmes de 1, on a donc :

  $$X^5 - 1 = \prod_{k=1}^{5}(X - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k2\pi}{5}})$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

- Factoriser au maximum le polynôme $X^5 - 1$.

  Les racines de $X^5 - 1$ sont les racines 5−èmes de 1, on a donc :

$$X^5 - 1 = \prod_{k=1}^{5}(X - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k2\pi}{5}})$$

- Soit $x \in \mathbb{R}$. Factoriser $A = \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x)$

$$A = Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}3x}\right) = Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}(1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\right)$$
$$= Re\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2x}(1 + 2\cos(x))\right) = ((1 + 2\cos(x))\cos(2x)$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Les fonctions $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ et $g(x) = \mathrm{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculer leurs dérivées.

Les fonctions $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ et $g(x) = \mathrm{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculer leurs dérivées.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$.

Les fonctions $f(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ et $g(x) = \mathrm{Arctan}(\sin(x))$ sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Calculer leurs dérivées.

- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ et donc $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2 + 12x + 11$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ g'(x) = \mathrm{Arctan}'(\sin(x)) \times \sin'(x) = \dfrac{\cos(x)}{1 + \sin^2(x)}$

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

- $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(k\pi) = 0$ donc $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi) = 0$.

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux

Calculer $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi)$ et $\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi)$.

- $\forall k \in \mathbb{Z},\ \sin(k\pi) = 0$ donc $\sum_{k=2}^{23} \sin(k\pi) = 0$.
- $\forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(k\pi) = (-1)^k$ donc

$$\sum_{k=2}^{23} \cos(k\pi) = \sum_{k=1}^{11} \cos(2k\pi) + \cos((2k+1)\pi) = 0$$

classes préparatoires scientifiques Lycée Brizeux