Automatismes en calcul, semaine du 16 décembre

15 décembre 2024

Résoudre $5y'' + 4y' + y = t$

Résoudre $5y'' + 4y' + y = t$

L'équation caractéristique est $5r^2 + 4r + 1 = 0$, ses solutions complexes conjuguées sont $r_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \mathrm{i}}{5}$ donc l'équation homogène a pour solutions les fonctions

$$t \longmapsto \mathrm{e}^{\frac{-2}{5}t}(\lambda \cos(\frac{1}{5}t) + \mu \sin(\frac{1}{5}t)) \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière affine, on trouve que $t \mapsto t - 4$ convient.
La solution générale est donc :

$$t \longmapsto t - 4 + \mathrm{e}^{\frac{-2}{5}t}(\lambda \cos(\frac{1}{5}t) + \mu \sin(\frac{1}{5}t)) \quad ((\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2)$$

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \longmapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \longmapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont définies sur les intervalles qui ne contiennent pas 0, on a donc des fonctions de la forme :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} t^2 + \lambda t \text{ si } t > 0 \\ t^2 + \mu t \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Quels que soient les réels λ et μ, f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.

Résoudre $ty' - y = t^2$ sur $\mathbb{R}$.

Pour $t \neq 0$, l'équation homogène est $y' - \frac{1}{t}y = 0$ qui a pour solution $y = \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
$t \mapsto t^2$ est solution particulière de l'équation ; la solution générale est donc : $t \longmapsto t^2 + \lambda t$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ces fonctions sont définies sur les intervalles qui ne contiennent pas 0, on a donc des fonctions de la forme :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} t^2 + \lambda t \text{ si } t > 0 \\ t^2 + \mu t \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

Quels que soient les réels λ et μ, f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) = 0$.
Mais il faut $\lambda = \mu$ pour que f soit dérivable.